Pauta PEP2 Álgebra 1, Primer Semestre 2012

1. Encontramos la intersección de la circunferencia con la linea recta resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x^2+y^2 & = & 25 \\ y+2x-10 & = & 0 \end{array}\right|$$

(0,4 puntos)

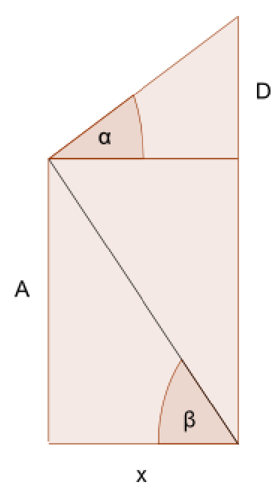
La solución que determinamos es $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, de donde $y_1 = 0$, $y_2 = 4$

(0,3 puntos)

Los puntos $(5,0);(3,4)$ son los extremos de la cuerda, de donde su longitud es $2\sqrt{5}$

(0,3 puntos)

2. a) El gráfico de la problemática es



Sea D como en la figura, entonces $H = A + D$.

Sea x = distancia entre los edificios, tenemos

$$\frac{x}{A} = \cot\beta, \text{ de donde } x = A\cot\beta$$

$$\frac{D}{x} = \tan\alpha, \text{ de donde } D = x\tan\alpha$$

(0,5 puntos)

Así,

$$D = x\tan\alpha = A\cot\beta\tan\alpha = A\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$

luego,

$$H = A + D = A\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} + A = A\left(\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} + 1\right) = A\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\beta}$$

(0,5 puntos)

b) De los datos obtenemos, $\tan\beta = \dfrac{x}{y}\tan\theta$ y $\cos\theta = \dfrac{\cos\alpha}{y}$

(0,4 puntos)

Como

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

es decir,

$$\tan\theta = \sqrt{\sec^2 - 1}$$

y

$$\sec\theta = \frac{y}{\cos x}$$

entonces,

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{y^2}{\cos^2 x} - 1} = \sqrt{y^2\sec^2 x - 1}$$

Finalmente,

$$\tan\beta = \frac{x}{y}\sqrt{y^2\sec^2 x - 1}$$

(0,6 puntos)

3. Como $p(x)$ es divisible por $x-k$ entonces $p(k)=0$, tenemos $k^3-7k-2k=0$, de donde $k^3-9k=0$, obteniendo

$$k_1=0,\ k_2=3,\ k_3=-3$$

(0,5 puntos)

Conseguimos $n=3$, $A=0$ y entonces $n^2+A^3=9$

(0,5 puntos)

4. a) Sea $z=a+bi\in\mathbb{C}$ entonces $z^2=\overline{z}$ indica que $a^2-b^2+2abi=a-bi$, de aqui obtenemos el sistema

$$\left|\begin{array}{rcr} a^2-b^2 & = & a \\ 2ab & = & -b \end{array}\right.$$

(0,3 puntos)

* Si $b\neq 0$ entonces desde $2ab=-b$ obtenemos $a=-\frac{1}{2}$, reemplazando en $a^2-b^2=a$ conseguimos $\frac{1}{4}-b^2=-\frac{1}{2}$ y entonces $b^2=\frac{3}{4}$, de donde, $b_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ y los números complejos son

$$z_1=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ z_2=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(0,4 puntos)

* Si $b=0$ entonces $a^2-b^2=a$ queda $a^2=a$, así $a_1=0$, $a_2=1$ y los números complejos son

$$z_3=(0,0),\ z_4=(1,0)$$

(0,4 puntos)

b) Si $x=i$ es raíz de $p(x)=0$ entonces $x=-i$ también es raíz de $p(x)=0$, de donde

$$p(x)=(x+i)(x-i)m(x)=(x^2+1)m(x)$$

(0,3 puntos)

Al dividir $p(x)$ entre $x^2 + 1$ obtenemos

$$x^3 - x^2 - x + 1$$

(0,4 puntos)

conseguimos $m(x) = (x - 1)(x - 1)(x + 1)$, así las raices son

$$x = 1,\ x = 1,\ x = -1$$

(0,3 puntos)