UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DMCC

PRUEBA ACUMULATIVA
Algebra 1

Santiago, 15 de diciembre de 2012

1) Un punto $P(x, y)$ se mueve en el plano de tal manera que su distancia al eje Y es siempre igual a su distancia al punto (4, 0).
Encuentre la ecuación que satisface estas condiciones e identifique con sus elementos principales

2) Considere la ecuación $x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 4x - 8 = 0$

a) Verifique que existe un número real que es raíz de la ecuación, determínela.
b) Demuestre que las restantes raíces de la ecuación son raíces complejas, sin calcularlas

3) Considere los grupos $(R^3,+)$ y $(R^2,+)$ y la función $H : R^3 \to R^2$ tal que

$H(x, y, z) = (x - y - z, y - z)$

a) Demuestre que H es homomorfismo
b) Determine $Ker(H)$
c) Determine $\mathrm{Im}(H)$

4) Encuentre una formula para $\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!(1-k)}{k^2 + k}$

5) Calcule las tres raíces cúbicas de –8

Resolución

1) Sea $P(x,y)$ el punto, entonces se cumple $x=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$

Elevando al cuadrado obtenemos $x^2=(x-4)^2+y^2$ de donde la ecuación que se obtiene es $y^2-8x+16=0$

Esta ecuación se escribe $(y-0)^2=8(x-2)$, representa una parábola con vértice (2,0), eje focal el eje X, y se abre hacia la derecha

(1,2) puntos

2a) Las raíces racionales de la ecuación $p(x)=x^5-2x^4+6x^3-12x^2+4x-8=0$ están en el conjunto $\{\pm 1,\pm 2,\pm 4,\pm 8\}$

Como $p(2)=0$ entonces $x=2$ es raíz de la ecuación

(0,6) puntos

2b) Al dividir $p(x)$ entre $x-2$ obtenemos el cuociente $m(x)=x^4+6x^2+4$ y usando "variaciones de signo" deducimos que la ecuación $m(x)=0$ tiene 4 raíces complejas

(0,6) puntos

3) a) Debemos demostrar que $H(a+b)=H(a)+H(b)\quad \forall a,b\in R^3$

Sean $a=(x,y,z),b=(p,q,r)$, entonces $a+b=(x+p,y+q,z+r)$ de donde

$$\begin{aligned}H(a+b)&=(x+p-(y+q)-(z+r),y+q-(z+r))\\&=(x-y-z,y-z)+(p-q-r,q-r)=H(a)+H(b)\end{aligned}$$

(0,4) puntos

3) b) $Ker(H)=\{v=(x,y,z)/H(v)=(0,0)\}$, tenemos:

$$H(x,y,z)=(0,0)\Rightarrow(x-y-z,y-z)=(0,0)\Rightarrow\begin{cases}x-y-z=0\\ y-z=0\end{cases}$$

Como $y=z$ y además $x=2z$ entonces $Ker(H)=\{(2z,z,z)/z\in R\}$

(0,4) puntos

3 c) Como $Him(H)=\{w\in R^2/\exists v\in R^3 \text{ tal que } H(v)=w\}$ consideremos $w=(p,q)$ y buscamos $v=(x,y,z)$ que cumpla la condición.

$$H(x,y,z)=(p,q)\Rightarrow(x-y-z,y-z)=(p,q)\Rightarrow\begin{cases}x-y-z=p\\ y-z=q\end{cases}.$$

Desde aquí obtenemos $y=z+q,x=p+2z+q,z=z\in R$, así, dado $w=(p,q)$ existe $v=(p+2z+q,z+q,z),z\in R$ tal que $H(v)=w$

(0,4) puntos

4) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)!(1-k)}{k^2+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)k(k-1)!(1-k)}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(k-1)!(1-k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[(k-1)!-k!\right]=(0!-1!)+...+((n-1)!-n!)=1-n!$$

(1,2 puntos

5) Como $z=-8=8(\cos 180º+isen180º)$ entonces

$$\sqrt[3]{-8}=\sqrt{8(\cos 180º+isen180º)}=w_k=\sqrt[3]{8}(\cos\frac{180º+k360º}{3}+isen\frac{180º+k360º}{3}),$$
$k=0,1,2$

Si $k=0$ entonces $w_0=2(\cos 60º+isen60º)=2(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i)=1+i\sqrt{3}$

Si $k=1$ entonces $w_1=2(\cos 180º+isen180º)=2(-1+0i)=-2$

Si $k=2$ entonces $w_2=2(\cos 300º+isen300º)=2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i)=1-i\sqrt{3}$, así,

$$\sqrt[3]{-8}=\begin{cases}-2\\1+i\sqrt{3}\\1-i\sqrt{3}\end{cases}$$

(1,2) puntos