UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DMCC

PRIMERA PRUEBA PARCIAL
Algebra 1

Santiago, 25 de octubre de 2012

1) a) Determine $x \in (0,2\pi)$ tal que $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$
b) Desde un cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre con un ángulo de elevación 30 grados. Si nos aproximamos, horizontalmente, 75 metros hacia la base de la torre el ángulo es ahora de 60 grados. Determine la altura de la torre.

(1,2 puntos)

2) Considere la relación R definida en Z tal que $aRb \Leftrightarrow \exists p \in Z$ tal que $a-b=5p$.
a) Sabemos que R es refleja y simétrica. Demuestre que R es transitiva
b) ¿Es cierto que la clase de equivalencia del 51 es igual a la clase de equivalencia del 26? Justifique.

(1,2 puntos)

3) La suma de tres primeros términos de una progresión aritmética es 24. Si al tercer término se le suma 4 se obtienen tres números en progresión geométrica.
a) Calcular la suma de los primeros 20 términos de la progresión aritmética creciente.
b) Escribir los cinco primeros términos de la progresión geométrica decreciente.

(1,2 puntos)

4) a) Verifique que $\sum_{p=1}^{2n} (-1)^p p^2 = \sum_{p=1}^{n} (4p-1), n \in IN$
b) Demuestre, usando inducción, la validez de la igualdad anterior, en IN

(1,2 puntos)

5) Pruebe que el coeficiente de x^2 en $(2+2x+x^2)^n$ es $2^{n-1}n^2$

(1,2 puntos)

Solucionario

1a) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x = 0$

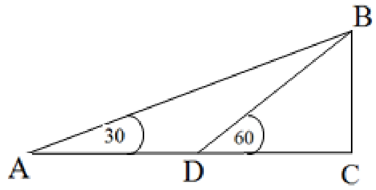
Obtenemos $\cos x(2\cos x + 1) = 0$ de donde $\begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cos x + 1 = 0 \end{cases}$

Si $\cos x = 0$ entonces $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

Si $2\cos x + 1 = 0$, es decir si $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ entonces $x = \begin{cases} \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \\ -\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in Z$

Si damos valores a k obtenemos $x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}$

1 b)



Sea CB = altura h
AD = 75 metros
DC = x metros

En el triángulo DCB, $\dfrac{h}{x} = tg60$ de donde $x = \dfrac{h}{tg60}$, por otro lado en el triangulo ACB, $\dfrac{h}{75 + x} = tg30$ es decir $75tg30 + xtg30 = h$

Reemplazando x en la última ecuación conseguimos $75tg30 + \dfrac{h}{tg60}tg30 = h$,así

$$h = \frac{75tg30}{1 - \dfrac{tg30}{tg60}} = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 64{,}95 \text{ metros}$$

2 a) Si $aRb \wedge bRc$ debemos demostrar que aRc

Como $\exists p \in Z$ tal que $a - b = 5p$ y $\exists q \in Z$ tal que $b - c = 5q$ entonces $a - c = 5(p + q), p + q \in Z$ de donde aRc

2 b) Como al dividir 51 y 26 por 5 obtenemos el mismo resto con valor 1 concluimos que la clase de equivalencia de 51 y 26 son iguales

3) Sean $x - d, x, x + d$ los 3 números en progresión aritmética, entonces se cumple $x - d + x + x + d = 24$ de donde $x = 8$

Conforme al enunciado, $8 - d, 8, 12 + d$ están en progresión geométrica de donde concluimos $\dfrac{8}{8 - d} = \dfrac{12 + d}{8}$; esta igualdad produce la ecuación

$d^2-4d+32=0$ cuyas raíces son $d=-8, d=4$

Si $d=-8$ entonces los números, en PA son 18,8,0 y en PG son 16,8,4

Si $d=4$ entonces los números, en PA son 4,8,12 y en PG son 4,8,16

La PA creciente es 4,8,12 y $\sum_{i=1}^{20} a_i = \frac{20}{2}[2\cdot 4+19\cdot 4]=840$

La PG decreciente es 16,8,4,1,1/4

4 a) $\sum_{p=1}^{2n}(-1)^p p^2 = -1^2+2^2-3^2+...-(2p-1)^2+(2p)^2$

$$=-(1^2+3^2+...+(2p-1)^2)+(2^2+4^2+....((2p)^2)$$

$$=-\sum_{p=1}^{n}(2p-1)^2+\sum_{p=1}^{n}(2p)^2=\sum_{p=1}^{n}\left[(2p)^2-(2p-1)^2\right]=\sum_{p=1}^{n}(4p-1)$$

4 b) Sea $P(n): \sum_{p=1}^{2n}(-1)^p p^2 = \sum_{p=1}^{n}(4p-1)$

i) $P(1)$ se cumple ya que $P(n): \sum_{p=1}^{2}(-1)^p p^2 = \sum_{p=1}^{1}(4p-1)$, esti ultimo dado que $\sum_{p=1}^{2}(-1)^p p^2 = -1^2+2^2=3$ y $\sum_{p=1}^{1}(4p-1)=4-1=3$

ii) Si $\sum_{p=1}^{2k}(-1)^p p^2 = \sum_{p=1}^{k}(4p-1)$ se cumple debemos demostrar que

$$\sum_{p=1}^{2k+2}(-1)^p p^2 = \sum_{p=1}^{k+1}(4p-1)$$

Veámoslo

$$\sum_{p=1}^{2k+2}(-1)^p p^2 = \sum_{p=1}^{2k}(-1)^p p^2-(2k+1)^2+(2k+2)^2$$

$$=\sum_{p=1}^{k}(4p-1)-(4k^2+4k+1)+(4k^2+8k+1)$$

$$=\sum_{p=1}^{k}(4p-1)+4k+3=\sum_{p=1}^{k}(4p-1)+4(k+1)-1=\sum_{p=1}^{k+1}(4p-1)$$

5) $(2+2x+x^2)^n = \left[(2+2x)+x^2\right]^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2+2x)^{n-k}(x^2)^k$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{p=0}^{n-k}\binom{n-k}{p}2^{n-k-p}(2x)^p x^{2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p}2^{n-k}x^{p+2k}$$

Para que $p+2k=2$ debe ocurrir: $k=0\wedge p=2$ o $k=1\wedge p=0$, entonces el coeficiente de x^2 es $\binom{n}{0}\binom{n}{2}2^n+\binom{n}{1}\binom{n-1}{0}2^{n-1}=\frac{n(n-1)}{2}2^n+n2^{n-1}=n^2 2^{n-1}$