UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DMCC

PRIMERA PRUEBA PARCIAL
Algebra 1, Fila A

Santiago, 05 de mayo de 2012

1) Calcule:

a) $\sum_{k=1}^{100} \frac{2kp^2 - 3}{2}$ b) $\sum_{k=1}^{2N} (\frac{k}{N} - 1)$ c) $\sum_{k=1}^{100} (\frac{k}{k+1} + (\frac{1}{2})^k - \frac{k+1}{k+2})$

2) Considere la sucesión $(a_n)_{n\in N}$ definida recursivamente por:
$a_1 = 3; a_2 = 5; a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, n \geq 3$

a) Determine a_4
b) Demuestre que $a_n = 2^n + 1 \ \forall n \in N$
c) Calcule $\sum_{k=1}^{n} a_k$

3) Sean A,B,C términos consecutivos de una progresión aritmética. tal que su suma es 36 y la suma de sus cuadrados es 594. Verifique si B, A+C, 4B están en progresión geométrica

4) Considere $(2x+1)(1+2x+x^2)^{10}$, determine, si existe, el coeficiente de x^6

INSTRUCCIONES
1) Debe responder cada pregunta en una hoja de cuadernillo, si no responde alguna pregunta, igualmente debe entregar dicha hoja
2) En cada hoja debe colocar: Nombre propio, nombre del profesor de su sección, sección horaria, número de la pregunta
3) No se permite el uso de calculadoras ni de celulares
4) No se permiten preguntas personales
5) Mucho éxito

Cada tema se evalúa con un máximo de 1,5 puntos

Desarrollo

1 a)

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{2kp^2-3}{2}=\sum_{k=1}^{100}kp^2-\sum_{k=1}^{100}\frac{3}{2}=p^2\sum_{k=1}^{100}k-\frac{3}{2}\cdot 100=\frac{100\cdot 101}{2}p^2-150=5050p^2-150$$

1b) $\sum_{k=1}^{2N}(\frac{k}{N}-1)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{2N}k-\sum_{k=1}^{2N}1=\frac{1}{N}\cdot\frac{2N(2N-1)}{2}-2N=-1$

1 c) $\sum_{k=1}^{100}(\frac{k}{k+1}+(\frac{1}{2})^k-\frac{k+1}{k+2})=\sum_{k=1}^{100}(\frac{k}{k+1}-\frac{k+1}{k+2})-\sum_{k=1}^{100}(\frac{1}{2})^k$

Aplicando la propiedad telescópica y la suma de una progresión geométrica obtenemos: $\frac{1}{2}-\frac{101}{102}+1-(\frac{1}{2})^{100}$

2 a) $a_3=3a_2-2a_1=3(5)-2(3)=9$

$a_4=3a_3-2a_2=3(9)-2(5)=17$

2 b) Sea $P(n): a_n=2^n+1$

(i) $P(1)$ es verdadero ya que $2^1+1=3$

(ii) Si $P(r)$ se cumple para $r\le k, k\in N$ debemos demostrar que

$a_{k+1}=2^{k+1}+1$

$a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1}=3(2^k+1)-2(2^{k-1}+1)$

$=3\cdot 2^k+3-2\cdot 2^{k-1}-2=2\cdot 2^k+1=2^{k+1}+1$

2 c) $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k+1)=\sum_{k=1}^{n}2^k+\sum_{k=1}^{n}1=2(2^n-1)+n$

3) Sean $A=x-d, B=x, C=x+d$ los tres números en P.A entonces

$$\begin{cases}(x-d)+x+(x-d)=36\\(x-d)^2+x^2+(x-d)^2=594\end{cases}$$

Desde la primera ecuación conseguimos $x=12$, entonces reemplazando en la segunda ecuación obtenemos $(12-d)^2+12^2+(12-d)^2=594$, esta ecuación de segundo grado tiene raíces $d=\pm 9$

Si $d=9$ entonces $A=3, B=12, C=21$ de donde $B, A+C, 4B$ toma valores $12,24,48$ que están en P.G.

Si $d=-9$ entonces $A=21, B=12, C=3$ de donde $B, A+C, 4B$ toma valores $12,24,48$ que están en P.G.

4) Como

$$A=(1+2x+x^2)^{10}=\left[(1+2x)+x^2\right]^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(1+2x)^{10-k}(x^2)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\sum_{p=0}^{10-k}\binom{10-k}{p}(2x)^p(x^2)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{10}\sum_{p=0}^{10-k}\binom{10}{k}\binom{10-k}{p}2^p x^{p+2k}$$ y como esta expresión esta multiplicada por

$2x+1$ entonces, para seleccionar el termino que contiene x^6 debemos seleccionar en la expresión A el termino que contiene x^5 y también el termino que contiene x^6

Como, en el primer caso se debe satisfacer $p+2k=5$ entonces las combinaciones posibles son: $(k=0,p=5),(k=1,p=3),(k=2,p=1)$
En este caso los coeficientes encontrados son:
$\binom{10}{0}\binom{10}{5}2^5,\binom{10}{1}\binom{9}{3}2^3,\binom{10}{2}\binom{8}{1}2^1$ que deben ser multiplicados por 2

En el segundo caso se debe satisfacer $p+2k=6$, como las combinaciones posibles son: $(k=0,p=6),(k=1,p=4),(k=2,p=2),(k=3,p=0)$,
entonces los coeficientes encontrados son:
$\binom{10}{0}\binom{10}{6}2^6,\binom{10}{1}\binom{9}{4}2^4,\binom{10}{2}\binom{8}{2}2^2,\binom{10}{3}\binom{7}{0}2^0$

El coeficiente buscado es igual a la suma de los detectados