UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DMCC

EVALUACION ACUMULATIVA
Algebra 1

Santiago, 19 de julio de 2012

1) Demuestre, usando inducción matemática que:
$sen(\theta + 2n\pi) = sen\theta$, $\forall n \in N,\ 0 < \theta < 2\pi$

(1,0 puntos)

2) Encuentre una formula para $\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)!(1-k)}{k^2+k}$

(1,0 puntos)

3) Sean $(G,*), (H,\circ)$ dos grupos con neutros e_G, e_H respectivamente.
Se define en el producto cartesiano $G \times H$ la ley de composición interna Δ por
$(a,b)\Delta(c,d) = (a * c, b \circ d)$
Demuestre que $(G \times H, \Delta)$ es un grupo

(1,0 puntos)

4) Si $x = i \in C$, $x = -2i \in C$ son raíces de la ecuación
$p(x) = x^6 - x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 4x - 8 = 0$, determine las otras raíces

(1,0 puntos)

5) a) Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de un triangulo rectángulo es equidistante de los tres vértices
b) Determine $k \in R$ para que la recta de ecuación $2x + 3y + k = 0$ forme con los ejes coordenados un triangulo de área 12, en el primer cuadrante

(1,0 puntos)

6) Si $tg\beta = \frac{n\, sen\alpha \cos\alpha}{1 - n\, sen^2\alpha}$ demuestre que $tg(\alpha - \beta) = (1-n)tg\alpha$

(1,0 puntos)

Pauta

1) Sea $P(n): sen(\theta + 2n\pi) = sen\theta$

P(1) se cumple ya que $sen(\theta + 2\pi) = sen\theta\cos 2\pi + \cos\theta\, sen 2\pi = sen\theta$

Si $sen(\theta + 2k\pi) = sen\theta$ debemos demostrar que $sen(\theta + 2(k+1)\pi) = sen\theta$

Veámoslo:

$$sen(\theta + 2(k+1)\pi) = sen((\theta + 2k\pi) + 2\pi) = sen(\theta + 2k\pi)\cos 2\pi + \cos(\theta + 2k\pi)sen 2\pi$$
$$= sen(\theta + 2k\pi) = sen\theta$$

2) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)!(1-k)}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)k(k-1)!(1-k)}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)!(1-k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[(k-1)! - k!\right] = (0! - 1!) + \ldots + ((n-1)! - n!) = 1 - n!$$

3) Debemos demostrar

a) Δ asociativa en $G \times H$ b) Existe neutro para Δ en $G \times H$

c) Cada elemento de $G \times H$ admite inverso en $G \times H$

a) Por demostrar $(a,b)\Delta\left[(c,d)\Delta(e,f)\right] = \left[a,b)\Delta(c,d)\right]\Delta(e,f)$

$$(a,b)\Delta\left[(c,d)\Delta(e,f)\right] = (a,b)\Delta(c*e, d\circ f) = (a*(c*e), b\circ(d\circ f))$$
$$= ((a*c)*e, (b\circ d)\circ f) = (a*c, b\circ d)\Delta(e,f)$$
$$= \left[(a,b)\Delta(c,d)\right]\Delta(e,f)$$

b) Supongamos que (x,y) de $G \times H$ cumple $(a,b)\Delta(x,y) = (a,b) = (x,y)\Delta(a,b)$, con $(a,b) \in G \times H$

De $(a,b)\Delta(x,y) = (a,b)$ tenemos $(a*x, b\circ y) = (a,b)$ de donde $a*x = a$ y también $b\circ y = b$. Como $(G,*),(H,\circ)$ son grupos entonces $x = e_G, y = e_H$ de donde el neutro buscado es (e_G, e_H). Se verifica además que $(e_G, e_H)\Delta(a,b) = (a,b)$

c) Supongamos que (a,b) de $G \times H$ cumple $(a,b)\Delta(x,y) = (e_G, e_H) = (a,b)\Delta(x,y)$, con $(a,b) \in G \times H$

De $(a,b)\Delta(x,y) = (e_G, e_H)$ obtenemos $(a*x, b\circ y) = (e_G, e_H)$ de donde $a*x = e_G$ y también $b\circ y = e_H$. Como $(G,*),(H,\circ)$ son grupos entonces $x = \bar{a}, y = \bar{b}$ de donde el inverso de (a,b) es $(\bar{a}, \bar{b})$ inversos en G y H respectivamente. Se verifica además que $(\bar{a}, \bar{b})\Delta(a,b) = (e_G, e_H)$

4) Como $x = i \in C$, $x = -2i \in C$ son raíces de la ecuación entonces $x = -i \in C$, $x = 2i \in C$ también lo son, de donde

$p(x) = x^6 - x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 4x - 8 = (x-i)(x+i)(x-2i)(x+2i)m(x) = 0$

Puesto que $(x-i)(x+i)(x-2i)(x+2i) = x^4 + 5x^2 + 4$ entonces al dividir p(x) por

$x^4 + 5x^2 + 4$ obtenemos $x^2 - x - 2$ que entrega las raíces $x = 2, x = -1$

5 a) Colocamos el triangulo rectángulo con los catetos coincidiendo con los ejes coordenados de un sistema coordenado rectangular, así las coordenadas de los vértices son: O(0,0) A(a,0),B(0,b)

Las coordenadas del punto medio de la hipotenusa son $P\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2)}\right)$ y es fácil ver que

$$\overline{OP} = \overline{AP} = \overline{BP} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$$

5 b) Las coordenadas de los puntos de intersección con lo ejes X e Y son

$\left(-\frac{k}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{k}{3}\right)$ de donde el área del triangulo rectángulo es $\frac{(-\frac{k}{2})(-\frac{k}{3})}{1} = 12$ de donde $k = -12$

6) $$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta} = \frac{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} - \frac{nsen\alpha\cos\alpha}{1 - nsen^2\alpha}}{1 + \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{nsen\alpha\cos\alpha}{1 - nsen^2\alpha}} = ... = tg\alpha - ntg\alpha = (1-n)tg\alpha$$