UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DMCC

CUARTO CONTROL DE EJERCICIOS, ALGEBRA 1

Santiago, 06 de diciembre de 2012

1) Un punto P de coordenadas $(x, y)$ se mueve en el plano de tal manera que producto de las pendientes de las dos rectas que unen P con los puntos de coordenadas $(-1,2)$ y $(5,6)$ es constante e igual a -2.
Demuestre que dicho lugar geométrico es una elipse y declare vértices y focos

(1,5 puntos)

2) Considere el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$

a) Identifique la cónica declarando sus elementos principales
b) Grafique en un único sistema coordenado considerando la intersección entre ellas y además, intersección de cada ecuación con los ejes coordenados

(1,5 puntos)

3) En Q se define la operación binaria interna $*$ por $a * b = a + b + ab$
¿Es $(Q,*)$ un grupo? Justifique

(1,5 puntos)

4) Sean $(R_2[x],+)$ el grupo de los polinomios en la indeterminada x con coeficientes en R con grado a lo mas 2 y $(M(2,1,R),+)$ el grupo de las matrices con 2 filas y una columna en R y $H : R_2[x] \rightarrow M(2,1,R)$ una función tal que $H(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b-c \end{pmatrix}$
a) Demuestre que H es un homomorfismo
b) Determine $Ker(H)$

(1,5 puntos)

1) Si $A(-1,2)$ y $B(5,6)$ entonces $m_{PA} = \dfrac{y-2}{x+1}$ y $m_{PB} = \dfrac{y-6}{x-5}$

Conforme al enunciado obtenemos la ecuación $\dfrac{y-2}{x+1} \cdot \dfrac{y-6}{x-5} = -2$ de donde

$y^2 - 8y + 2x^2 - 8x + 2 = 0$

Ahora, $y^2 - 8y + 2x^2 - 8x + 2 = 0 \Rightarrow (y^2 - 8y) + 2(x^2 - 4x) = -2$

$$\Rightarrow (y-4)^2 + 2(x-2)^2 = 22 \Rightarrow \frac{(y-4)^2}{22} + \frac{(x-2)^2}{11} = 1$$

Finalmente $V_1(2,4+\sqrt{22}), V_2(2,4-\sqrt{22}), F_1(2,4+\sqrt{11}), F_2(2,4-\sqrt{11})$

2 a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x) + (y^2 - 2y) = -1$

$$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = -1 + 4 + 1$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

Así, la ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ representa la circunferencia con centro en el punto $(2,1)$ y radio de longitud 2

2 b) Veamos ahora la intersección de la circunferencia con los ejes coordenados

X – intercepto. Ocurre si $y = 0$, así, debemos resolver la ecuación $x^2 - 4x + 1 = 0$

Como $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ y $x_2 = 2 + \sqrt{3}$, entonces los puntos de intersección son $(2-\sqrt{3},0)$ y $(2+\sqrt{3},0)$

Y – intercepto. Ocurre si $x = 0$, así, debemos resolver la ecuación $y^2 - 2x + 1 = 0$, la solución es $y = 1$ (de multiplicidad 2), así, la circunferencia corta la eje Y en el punto $(0,1)$

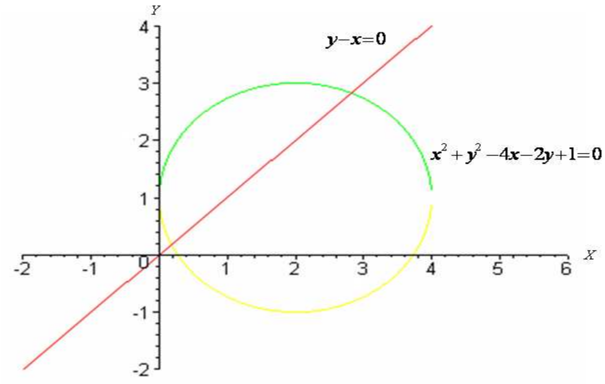
La ecuación $y - x = 0$ representa una línea recta que pasa por el origen

Veamos ahora la intersección de la circunferencia con la línea recta, para ello resolvemos el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 & \text{(a)} \\ y - x = 0 & \text{(b)} \end{cases}$

Reemplazando *y* por *x* en (a) obtenemos la ecuación $2x^2 - 6x + 1 = 0$ cuyas soluciones son $x = 3 + \sqrt{7}, x = 3 - \sqrt{7}$

Si $x = 3 + \sqrt{7}$ entonces $y = 3 + \sqrt{7}$ luego, $(3+\sqrt{7},3+\sqrt{7})$ es una intersección

Si $x = 3 - \sqrt{7}$ entonces $y = 3 - \sqrt{7}$ luego, $(3-\sqrt{7},3-\sqrt{7})$ es otra intersección




3) Para que $(Q,*)$ sea un grupo, la operación binaria interna $*$ debe ser :tal que

a) $*$ asociativa b) existir neutro $e \in Q$ tal que $a*e = e*a = a \quad \forall a \in Q$

c) si $a \in Q$ entonces existe $\bar{a} \in Q$ tal que $a*\bar{a} = \bar{a}*a = e$

Veámoslo

a)

$$a*(b*c) = a*(b+c+bc) = a+b+c+bc+a(b+c+bc) = a+b+c+bc+ab+ac+abc)$$

$$(a*b)*c = (a+b+ab)*c = a+b+ab+c+(a+b+ab)c = a+b+ab+c+ac+bc+abc$$

entonces $*$ asociativa

b) Desde $a*e = a$ obtenemos $a+e+ae = a$ es decir $e = 0 \in Q$, por otro lado

$$e*e = 0*a = 0+a+0a = a$$

c) Desde $a*\bar{a} = e$ tenemos $a+\bar{a}+a\bar{a} = 0$, así $\bar{a} = \dfrac{-a}{1+a}$ si $a \neq -1$

Concluimos que $(Q,*)$ no es grupo

4 a) H es homomorfismo si y solo si $H(a+b) = H(a)+H(b) \quad \forall a,b \in R_2[x]$

Si $a = a+bx+cx^2$ y $b = p+qx+rx^2$ entonces

$$H(a+b) = H(a+p+(b+q)x+(c+r)x^2) = \begin{pmatrix} a+p+(b+q)+(c+r) \\ (b+q)-(c+r) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+b+c \\ b-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p+q+r \\ q-r \end{pmatrix} = H(a)+H(b)$$

4 b) $Ker(H) = \left\{ p(x) = a+bx+cx^2 \in R_2[x] / H(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Tenemos:

$$H(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b+c \\ b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 0 \\ b-c = 0 \end{cases} \Rightarrow b = c, a = -2c$$ de

donde $Ker(H) = \{p(x) = -2c+cx+cx^2 / c \in R\}$