UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DMCC

TERCER CONTROL DE EJERCICIOS, ALGEBRA 1
CURSOS DE LA MAÑANA

Santiago, 15 de noviembre de 2012

1) Calcule las raíces de la ecuación $p(x) = x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 64x - 64 = 0$

Resolución

Las posibles raíces racionales de $p(x) = 0$ son $\frac{c}{d} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 16, \pm 32, \pm 64\}$

Se verifica que $p(2) = 0$ de donde $p(x) = (x-2)s(x)$

Dividiendo obtenemos $s(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 32$

Las posibles raíces racionales de $s(x) = 0$ son $\frac{c}{d} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 16, \pm 32\}$, como $s(2) = 0$

luego $p(x) = (x-2)(x-2)m(x)$

Como $m(x) = x^2 - 16$ entonces $p(x) = (x-2)(x-2)(x-4)(x+4)$.

Las raíces son 2,2,4,-4

2) Determine $\{z \in C / \mathrm{Re}((z-1)^2) = \mathrm{Re}(z(z-1))\}$

Resolución

Si $z = a + bi$ entonces $(z-1)^2 = (a - 1 + bi)^2 = (a-1)^2 - b^2 + ab(a-1)i$ de donde

$\mathrm{Re}((z-1)^2) = (a-1)^2 - b^2$.

Por otro lado, $z(z-1) = a(a-1) - b^2 + i[ab + b(a-1)]$ y entonces

$\mathrm{Re}(z(z-1)) = a(a-1) - b^2$

Del enunciado del problema tenemos la ecuación $(a-1)^2 - b^2 = a(a-1) - b^2$ la cual tiene solución $a = 1$, así $z = 1 + bi, b \in R$

El grafico es la línea recta perpendicular al eje X por x = 1

3) Si $\sqrt[3]{a+bi} = 1 + i$ calcule a) $(2b + 3ai)^3$ b) $\frac{a - bi}{a + bi}$

Resolución

$\sqrt[3]{a+bi} = 1 + i$ indica que $a + bi = (1+i)^3$, es decir, $a + bi = -2 + 2i$, lo que implica que $a = -2, b = 2$

a) $(2b + 3ai)^3 = (4 - 6i)^3 = -368 - 72i$

b) $\frac{a - bi}{a + bi} = \frac{-2 - 2i}{-2 + 2i} = \frac{-2 - 2i}{-2 + 2i} \cdot \frac{-2 - 2i}{-2 - 2i} = i$

4) Comprobar que la ecuación $p(x) = x^4 - 11x^2 - 12x + 4 = 0$ **,** tiene una raíz doble con valor – 2 y hallar las restantes raíces

Resolucion

Si $p(x) = 0$ tiene una raíz doble con valor – 2 entonces $p(x) = (x+2)^2 s(x) = 0$

Al dividir $p(x)$ por $x^2 + 4x + 4$ obtenemos $s(x) = x^2 - 4x + 1$**,** de donde

$p(x) = (x+2)^2 (x^2 - 4x + 1) = 0$

Las raíces de la ecuación $s(x) = x^2 - 4x + 1 = 0$ son $2 + \sqrt{3}$ y $2 - \sqrt{3}$