UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DMCC

TERCER CONTROL DE EJERCICIOS, ALGEBRA 1
CURSOS DE LA TARDE

Santiago, 15 de noviembre de 2012

1) Encuentre las raíces de la ecuación polinomial $p(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 = 0$
Resolución
Como las posibles raíces racionales de la ecuación están en el conjunto $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ y $p(-1) \equiv 0$ entonces $p(x) = (x+1)s(x) = 0$
Efectuando la división de polinomios obtenemos que $p(x) = (x+1)(x^3 - 2x^2 - 11x + 12) = 0$
Dado que $s(1) = 0$ entonces $s(x) = (x-1)m(x)$ de donde $p(x) = (x+1)(x-1)m(x) = 0$
Al dividir $s(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ por $x - 1$ obtenemos $m(x) = x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$
donde, finalmente $p(x) = (x+1)(x-1)x-4)(x+3) = 0$

2) Calcule $(1-i)^{16} + (1+i)$
Resolución
Como $1 - i = \sqrt{2}(\cos 315 + isen 315)$ entonces
$(1-i)^{16} = \left[\sqrt{2}(\cos 315 + isen 315)\right]^{16} = 2^8(\cos 5040 + isen 5040) = 2^8$
Así $(1-i)^{16} + (1+i) = 257 + i$

3) Verifique que $\mathrm{Re}(\frac{z_1}{z_1 + z_2}) + \mathrm{Re}(\frac{z_2}{z_1 + z_2}) = 1$; $\forall z_1, z_2 \in C, z_1 + z_2 \neq 0$
Resolución
Con $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ conseguimos:
$\mathrm{Re}(\frac{z_1}{z_1 + z_2}) = \frac{a(a+c) + b(b+d)}{(a+c)^2 + ((b+d)^2}$, $\mathrm{Re}(\frac{z_2}{z_1 + z_2}) = \frac{c(a+c) + d(b+d)}{(a+c)^2 + ((b+d)^2}$ de donde
$\mathrm{Re}(\frac{z_1}{z_1 + z_2}) + \mathrm{Re}(\frac{z_2}{z_1 + z_2}) = 1$

4) Considere el polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + (1-2a)x + b$, con a, b constantes.
Si se sabe que 2 es un cero de $p(x)$ y que el promedio entre a y b es -3, determine a, b y los demás ceros del polinomio $p(x) \in R[x]$.

Resolución

Como $p(2) = 0$, entonces $p(2) = 8 + 4a + 2 \cdot (1-2a) + b = 0$, o sea $10 + b = 0$, de donde $b = -10$, además como el promedio entre a y b es -3, entonces $a + b = -6$, con lo cual $a = 4$, por tanto el polinomio buscado es $p(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$

Al dividir $p(x)$ por $x - 2$ obtenemos $x^2 + 6x + 5$ de donde, los otros ceros son -5 y -1