UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Miercoles 11/04/2012

`PAUTA PRIMER CONTROL DE ALGEBRA I

1. Demuestre que x - 1 y x - 3, son factores de $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$. Encuentre además, los factores restantes.
Solución. Se puede efectuar división sintética.

1	-5	5	5	-6	1
	1	-4	1	6	
1	-4	1	6	**0**	

Se obtiene un cuociente $q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ y un resto cero, lo cual equivale a que (x - 1) es un factor de p(x).
Dividimos ahora el cuociente ontenido por (x - 3) , se puede hacer división sintética

1	-4	1	6	3
	3	-3	-6	
1	-1	-2	**0**	

De esta forma se tiene que $p(x) = (x - 1) (x - 3) (x^2 - x - 2)$
Resolviendo $x^2 - x - 2 = 0$, se obtien las soluciones x = - 1 , x = -2
De esta forma : p(x) = (x - 1) (x - 3) (x - 1) (x - 2)

2. Aldividir el polinomio p(x) por (x - 1) da resto 1, al dividirlo por (x - 2), da resto 2 y al dividirlo por (x - 3) da resto 3. Encuentre el resto que se obtiene al dividir p(x) por (x -1)(x - 2)(x - 3).
Solución. por el algorito de la división, se tiene que:

$$p(x) = (x -1)(x - 2)(x - 3)q(x) + (ax^2 + bx + c)$$

Que el resto de la división de p(x) por (x -1) sea 1,equivale a que p(1) = 1

$p(1) = 1 \iff p(1) = 0 + (a + b + c) = 1$
$p(2) = 2 \iff p(2) = 0 + (4a + 2b + c) = 2$
$p(1) = 1 \iff p(3) = 0 + (9a + 3b + c) = 3$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, sde tiene que a = c = 0 , b = 1
por lo que el resto es: R(x) = x.

3. Demuestre que : $1+ 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + ... + n\cdot 2^{n-1} = 1 + (n -1)\cdot 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Dem.
Para n = 1 . $1 = 1 + (1 -1) 2^{1-1}$
$1 = 1$
Se verifica la proposición para n = 1

Hipótesis de Inducción.
Se verifica para n= k
$$1+ 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + ... + k\cdot 2^{k-1} = 1 + (k -1)\cdot 2^k$$
Tesis: Se verifica para n = k + 1.
$$1+ 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + ... + k\cdot 2^{k-1}+ (k + 1) \cdot 2^k = 1 + k \cdot 2^{k+1}$$
Dem. Partiendo de la hipótesis y sumando $(k + 1)\cdot 2^k$ a ambos lados:

$$1+ 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + ... + k\cdot 2^{k-1} = 1 + (k -1)\cdot 2^k \quad / + (k + 1) 2^k$$

$$1+ 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + ... + k\cdot 2^{k-1}+ (k + 1) \cdot 2^k = 1 + (k -1)\cdot 2^k + (k +1) 2^k$$

$$1+ 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + ... + k\cdot 2^{k-1}+ (k + 1) \cdot 2^k = 1 + 2^k((k - 1) +(k + 1))$$

$$1+ 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + ... + k\cdot 2^{k-1}+ (k + 1) \cdot 2^k = 1 + 2^k\cdot 2k$$

$$1+ 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + ... + k\cdot 2^{k-1}+ (k + 1) \cdot 2^k = 1 + k\cdot 2^{k+1}.$$