USACH
ALGEBRA
Primer semestre 2012
B3

Pauta control 1

1) Determine el polinomio $p(x)$ de grado 3 cuyas raíces son $,-2,1,2$
y que satisface $p(0)=8$

Solución:
a) Dada las raíces del polinomio cúbico, este se puede expresar como

$$p(x)=a(x+2)(x-1)(x-2)$$

Como $p(0)=8$ entonces $p(0)=a(0+2)(0-1)(0-2)=8$
Esto implica que $4a=8 \Rightarrow a=2$

Por lo tanto el polinomio es $p(x)=2(x+2)(x-1)(x-2)$

2) Demuestre que $(x-1)$ es factor del polinomio $p(x)=2x^3+x^2-2x-1$ y factorice $p(x)$.

Solución:
Utilizando el teorema del resto se tiene.
$p(1)=0 \Rightarrow 1$ es raíz y por lo tanto $(x-1)$ factor

Para encontrar los otros factores podemos utilizar primero división sintética

2 1 -2 -1 |1
__2__3_1 |
2 3 1 0

$$p(x)=(x-1)(2x^2+3x+1)=(x-1)(x+1)(2x+1)$$

3) Encuentre el valor de m que satisface $\sum_{i=3}^{8}(mi-4)=75$

Solución:

$$\sum_{i=3}^{8}(mi-4)=\sum_{i=1}^{8}(mi-4)-\sum_{i=1}^{2}(mi-4)$$

$$=m\sum_{i=1}^{8}i-\sum_{i=1}^{8}4-(m\sum_{i=1}^{2}i-\sum_{i=1}^{2}4)$$

$$=m\cdot\frac{8\cdot 9}{2}-32-(m\frac{2\cdot\ 3}{2}-8)$$
$$=33m-24$$

Por lo tanto se tiene la ecuación $33m-24=75 \Rightarrow m=3$

USACH
ALGEBRA
Primer semestre 2012
B3

4) Demuestre usando inducción matemática que es verdadera la formula.

$(\forall n,\ n \in N) \quad F(n): 7^n - 1$ es divisible por 6

Solución:

i) Por demostrar que $F(1)$ es verdadera

$7^1 - 1 = 6 = 6 \cdot 1$ Esto implica que $F(1)$ es verdadera

ii) Hipótesis de Inducción: Supongamos que $F(n)$ es verdadera.

$$7^n - 1 = 6q \quad \text{Para } q \in N$$

ii) Tesis de Inducción: Por demostrar que $F(n+1)$ es verdadera

$$7^{n+1} - 1 = 6r \quad \text{Para } r \in N$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
7^{n+1} - 1 &= 7^n \cdot 7 - 1 \\
&= 7^n \cdot 7 - 7 + 7 - 1 \\
&= 7(7^n - 1) + 6 \\
&= 7 \cdot 6q + 6 && \textit{por hipótesis} \\
&= 6(7q + 1) \\
&= 6r
\end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrada la proposición.