UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DMCC

PRIMER CONTROL DE EJERCICIOS, Algebra 1, Fila A
Cursos B2-1, B2-2, B2-3, B2-4, B2-5

Santiago, 09 de abril de 2012

1) Considere la sucesión $(a_n)_{n\in n}$ tal que $a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ \dfrac{n}{n+1} \cdot a_{n-1} & \text{si } n > 1 \end{cases}$

   a) Determine el valor de a_2, a_3, a_4 usando la definición y justifique que se deduce $a_n = \dfrac{4}{n+1}$

   b) Demuestre que $a_n = \dfrac{4}{n+1}$ se cumple para todo valor de n en N

2) Determine tres números enteros consecutivos tal que al dividir el triple del numero mayor por el numero menor se obtiene un numero que es igual a $\dfrac{5}{12}$ del numero intermedio

3) Al dividir un polinomio $p(x)$ separadamente por $x+1$ y por $x-2$ se obtiene como resto a 2 y 5 respectivamente. Determine el resto que se produce al dividir $p(x)$ por $(x+1)(x-2)$

4) Demuestre que si un número entero positivo se escribe como $6^{n+1}+4$ entonces es divisible por 5, para todo valor de n en los naturales

Cada pregunta se evalúa con un máximo de 1,5 puntos

Resolución

1 a) $a_2 = \frac{2}{3} \cdot a_1 = \frac{2}{3} \cdot 2$

$a_3 = \frac{3}{4} \cdot a_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2$

$a_4 = \frac{4}{5} \cdot a_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2$

$a_5 = \frac{5}{6} \cdot a_4 = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2, \ldots\ldots\ldots a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3} \cdot 2 = \frac{4}{n+1}$

1 b) Sea $P(n) : a_n = \frac{4}{n+1}$

a) $P(1)$ se cumple ya que $a_1 = 2 = \frac{4}{1+1}$

b) Si $P(2), P(3), \ldots.., P(k)$ se cumplen, debemos demostrar que $P(k+1)$ también se verifica,es decir de debe demostrar que $a_{k+1} = \frac{4}{k+2}$ tenemos:

$$a_{k+1} = \frac{k+1}{k+2} \cdot a_k = \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{4}{k+1} = \frac{4}{k+2}$$

2) Sean $x, x+1, x+2$ los tres números consecutivos, entonces la ecuación que se produce es $\frac{3(x+2)}{x} = \frac{5}{12}(x+1)$

Al desarrollar la ecuación obtenemos $5x^2 - 31x - 72 = 0$ cuyas raíces son $x = 8, x = -1{,}8$, de donde los números pedidos son 8,9,10

3) Del enunciado se deduce que $p(-1) = 2$ y $p(2) = 5$

El algoritmo de Euclides indica que $p(x) = (x+1)(x-2)q(x) + Ax + B$

de donde obtenemos $p(-1) = -A + B = 2$ y $p(2) = 2A + B = 5$

Resolviendo el sitema $\begin{cases} -A + B = 2 \\ 2A + B = 5 \end{cases}$ conseguimos $A = 1, B = 3$ de donde el resto pedido es $r(x) = x + 3$

4) Sea $P(n) : 6^{n+1} + 4 = 5q$ para algún q en N

a) $P(1)$ se verifica ya que $6^{1+1} + 4 = 40 = 5q$ con q = 8

b) Si sabemos que existe m en N tal que $6^{k+1} + 4 = 5m$, debemos demostrar que existe w en N tal que $6^{k+2} + 4 = 5w$; tenemos

$6^{k+2} + 4 = 6 \cdot 6^{k+1} + 4 = 6(5m-4) + 4 = 30m - 20 = 5(6m-4) = 5w$ con $w = 6m - 4$ que es un natural