Universidad De Santiago De Chile
Algebra 1
Prof: E. Rivera - R. Vargas
1^{er} semestre 2012

Pauta Control N°1

1. Considere el polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ definido por $p(x) = x^4 + \lambda x^3 - 2\lambda x + 4$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Evaluar el polinomio en los valores $\{-1, 0, 1\}$.

b) Determine el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, sabiendo que el polinomio $q(x) = x + 2$ divide a $p(x)$.

c) Determine el conjunto $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = 0\}$.

Solución.

a) Tenemos que

- $p(-1) = (-1)^4 + \lambda \cdot (-1)^3 - 2\lambda \cdot (-1) + 4 = 5 + \lambda$
- $p(0) = 0^4 + \lambda \cdot 0^3 - 2\lambda \cdot 0 + 4 = 4$
- $p(1) = 1^4 + \lambda \cdot 1^3 - 2\lambda \cdot 1 + 4 = 5 - \lambda$

b) Aplicando el Teorema del Resto tenemos

$$\begin{aligned} p(-2) = 0 &\iff (-2)^4 + \lambda \cdot (-2)^3 - 2\lambda \cdot (-2) + 4 = 0 \\ &\iff 16 - 8\lambda + 4\lambda + 4 = 0 \\ &\iff 20 - 4\lambda = 0 \\ &\iff \lambda = 5 \end{aligned}$$

Entonces

$$p(x) = x^4 + 5x^3 - 10x + 4$$

c) De lo anterior, claramente $x = -2$ es solución de la ecuación pedida. Por otro lado notemos que si $\lambda = 5$, entonces del item a) $p(1) = 0$, luego $x = 1$ es también solución de la ecuación. Realizando división sintética

Potencias →	x^4	x^3	x^2	x	$n°$
Coeficientes →	4	5	0	-10	4
-2		-2	-6	12	-4
Coeficientes del cociente	1	3	-6	2	0
Potencias del cociente	x^3	x^2	x	$n°$	resto

Potencias →	x^3	x^2	x	$n°$
Coeficientes →	1	3	-6	2
1		1	4	-2
Coeficientes del cociente	1	4	-2	0
Potencias del cociente	x^2	x	$n°$	resto

Así

$$p(x) = x^4 + 5x^3 - 10x + 4 = (x + 2)(x - 1)(x^2 + 4x - 2) = 0$$

Finalmente nos falta determinar las raíces de la ecuación cuadrática

$$\begin{aligned} x^2+4x-2=0 \iff & x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} \\ \iff & x=-2-\sqrt{6} \ \vee \ x=-2+\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathbb{S}=\{-2,1,-2-\sqrt{6},-2+\sqrt{6}\}$$

2. Si la proposición

$$\{\sim[(p\wedge r)\Rightarrow(p\wedge q)]\}\vee\{(q\wedge\sim r)\wedge(p\Leftrightarrow q)\} \tag{1}$$

es verdadera, determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$p\wedge(q\vee r)\,. \tag{2}$$

Solución. Si la proposición en (1) es verdadera entonces existen dos casos:

Caso 1. $\sim[(p\wedge r)\Rightarrow(p\wedge q)]$ es verdadera.

Si $\sim[(p\wedge r)\Rightarrow(p\wedge q)]$ es verdadera entonces $[(p\wedge r)\Rightarrow(p\wedge q)]$ es falsa y la única manera que una implicación sea falsa es que $(p\wedge r)$ sea verdadera y $(p\wedge q)$ sea falsa. Como $(p\wedge r)$ es verdadera entonces p es verdadera y r es verdadera. Finalmente por ser p verdadera y $(p\wedge q)$ falsa implica que q es falsa. Entonces, el valor de verdad de (2) en este caso es

$$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow V\wedge(F\vee V)\Leftrightarrow V\wedge V\Leftrightarrow V\,.$$

Caso 2. $\{(q\wedge\sim r)\wedge(p\Leftrightarrow q)\}$ es verdadera.

Si $\{(q\wedge\sim r)\wedge(p\Leftrightarrow q)\}$ es verdadera entonces $(q\wedge\sim r)$ es verdadera y $(p\Leftrightarrow q)$ es verdadera. Como $(q\wedge\sim r)$ es verdadera entonces q es verdadera y $\sim r$ es verdadera, esto es, r es falsa. Por ser $p\Leftrightarrow q$ verdadera y q verdadera implica que p es verdadera. Entonces, el valor de verdad de (2) en este caso es:

$$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow V\wedge(V\vee F)\Leftrightarrow V\wedge V\Leftrightarrow V\,.$$

Por lo tanto, de los casos 1 y 2 se sigue que la proposición en (2) es verdadera.