UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DMCC

PRIMER CONTROL DE EJERCICIOS, ALGEBRA 1
CURSOS DE LA TARDE

Santiago, 06 de septiembre de 2012

1) Si $\left[(p \wedge r) \wedge \sim (p \wedge q)\right] \vee \left[(q \wedge \sim r) \wedge (p \Leftrightarrow q)\right]$ es una proposición verdadera determine el valor de verdad de la proposición $p \wedge (q \vee r)$. Justifique

(1,5 puntos)

2) Establezca, justificando cada paso, la validez del argumento

$$\begin{array}{c} p \\ p \to \sim q \\ \underline{\sim q \to \sim r} \\ \therefore \ \sim r \end{array}$$

(1,5 puntos)

3) Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ se cumple para todo valor de n en los naturales

(1,5 puntos)

4) Dados $a, b \in R, a \neq 0, b \neq 1$ demuestre que $a + ab + ab^2 + ... + ab^n = \dfrac{ab^{n+1} - a}{b - 1}$, $\forall n \in N$

(1,5 puntos)

Resolución

1) Si $\left[(p\wedge r)\wedge \sim(\mathrm{p}\wedge \mathrm{q})\right]\vee\left[(\mathrm{q}\wedge \sim r)\wedge(p\Leftrightarrow q)\right]$ es V entonces puede ocurrir

a) $\left[(p\wedge r)\wedge \sim(\mathrm{p}\wedge \mathrm{q})\right]$ es V de donde $p\wedge r$ es V y también $\sim(p\wedge q)$ es V, esto indica: que p es V y r es V y también $p\wedge q$ es F; este ultimo valor veritativo dice que q es F.

Así $\mathrm{p}\wedge(q\vee r)$ es $V\wedge(F\vee V)$ es decir $\mathrm{p}\wedge(q\vee r)$ es V

b) $\left[(\mathrm{q}\wedge \sim r)\wedge(p\Leftrightarrow q)\right]\mathrm{V}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{q}\wedge\sim r \text{ es V}\\ \wedge\\ p\Leftrightarrow q \text{ es V}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q \text{ es V y r es F}\\ \wedge\\ \text{p es } V \text{ y q es V}\end{cases}$, finalmente

$\mathrm{p}\wedge(q\vee r)$ es $V\wedge(F\vee V)$ es decir $\mathrm{p}\wedge(q\vee r)$ es V

2)

Pasos	Razón
1) $p\to\sim q$	Premisa
2) $\sim q\to\sim r$	Premisa
3) $p\to\sim r$	Pasos 1) y 2) y Ley de silogismo
4) p	Premisa
5) $\sim r$	Pasos 3) y 4) y Modus Ponens

3) Sea $P(n):1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

i) $P(1)$ es V ya que $1.2=\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}=2$

$P(2)$ es V ya que $1.2+2\cdot 3=\dfrac{2(2+1)(2+2)}{3}=8$

ii) Si $P(k):1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+k(k+1)=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$ debemos demostrar que

$$P(k+1):1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+k(k+1)+(k+1)(k+1+1)=\frac{(k+1)(k+1+1)(k+1+2)}{3}$$

Veámoslo

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+k(k+1)+(k+1)(k+1+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

4) Sea $P(n): a + ab + ab^2 + ... + ab^n = \dfrac{ab^{n+1} - a}{b-1}$

i) $P(1)$ es V ya que $a + ab$ y $\dfrac{ab^{1+1} - a}{b-1} = \dfrac{a(b^2 - 1)}{b-1} = a(b+1)$

$P(2)$ es V ya que $a + ab + ab^2$ y por otro lado

$$\frac{ab^{2+1} - a}{b-1} = \frac{a(b^3 - 1)}{b-1} = \frac{a(b-1)(b^2 + b + 1)}{b-1} = a + ab + ab^2$$

ii) Si $a + ab + ab^2 + ... + ab^k = \dfrac{ab^{k+1} - a}{b-1}$ debemos demostrar que

$$a + ab + ab^2 + ... + ab^k + ab^{k+1} = \frac{ab^{k+2} - a}{b-1}.$$

Tenemos

$$a + ab + ab^2 + ... + ab^k + ab^{k+1} = \frac{ab^{k+1} - a}{b-1} + ab^{k+1} = \frac{ab^{k+1} - a + (b-1)ab^{k+1}}{b-1}$$

$$= \frac{ab^{k+1}(1 + b - 1) - a}{b-1} = \frac{ab^{k+2} - a}{b-1}$$