UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DMCC

PRIMER CONTROL DE EJERCICIOS, ALGEBRA 1
CURSOS DE LA MAÑANA

Santiago, 06 de septiembre de 2012

1) Si $p \Rightarrow \sim(\mathrm{p} \wedge \mathrm{q})$ es una proposición falsa determine el valor de verdad de la proposición $\sim(\mathrm{p} \vee (q \wedge r)) \Rightarrow \sim q \wedge m$. Justifique

(1,5 puntos)

2) Establezca, justificando cada paso, la valides del argumento

$$\begin{array}{l} p \to r \\ \sim p \to q \\ \underline{q \to s} \\ \therefore \sim r \to s \end{array}$$

(1,5 puntos)

3) Demuestre que $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+....+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$ se cumple para todo valor de n en los naturales

(1,5 puntos)

4) Sea f una función definida por $f(0)=0$, $f(n)=2f(n-1)+1$ si $n \in N$
Usando Inducción demuestre que $f(n)=2^{n}-1$ se cumple para todo valor de n en N

(1,5 puntos)

Resolución

1) Si $p \Rightarrow \sim (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q})$ es una proposición falsa entonces p es verdadera y $\sim (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q})$ es falsa, de donde p es V y $\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}$ es V, finalmente p es V y q es V
Con esto deducimos que $\mathrm{p} \vee (q \wedge r)$ es V y entonces $\sim (\mathrm{p} \vee (q \wedge r))$ es F. Concluimos que la proposición $\sim (\mathrm{p} \vee (q \wedge r)) \Rightarrow \sim q \wedge m$ es V

2)

Pasos	Razón
1) $p \to r$	Premisa
2) $\sim r \to \sim p$	Paso 1) y $p \to r \Leftrightarrow \sim r \to \sim p$
3) $\sim p \to q$	Premisa
4) $\sim r \to q$	Pasos 2) y 3) y Ley de silogismo
5) $q \to s$	Premisa
6) $\sim r \to s$	Pasos 4) y 5) y ley de silogismo

3) Sea $P(n): \dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

i) $P(1)$ es V ya que $\dfrac{1}{1\cdot 3}=\dfrac{1}{2\cdot 1+1}=\dfrac{1}{3}$

$P(2)$ es V ya que $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}=\dfrac{2}{2\cdot 2+1}=\dfrac{2}{5}$

ii) Si $P(k): \dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{k}{2k+1}$ debemos demostrar que

$$P(k+1): \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

Veámoslo

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}=$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

4) Sea $P(n): f(n) = 2^n - 1$

i) $P(1)$ es V ya que $f(1) = 2f(0) + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ y $2^1 - 1 = 1$

$P(2)$ es V ya que $f(2) = 2f(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ y $2^2 - 1 = 3$

ii) Si $f(k) = 2^k - 1$ debemos demostrar que $f(k+1) = 2^{k+1} - 1$

Veámoslo

$f(k+1) = 2f(k) + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1$