POLINOMIOS

1.1. DEFINICIONES

Definición 1.1.1. Sea K un cuerpo. Un polinomio en x, con coeficientes en K es toda expresión del tipo

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ; \quad a_i, x \in K; \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

donde todos los coeficientes a_i son nulos, excepto una cantidad finita de ellos.

Notación 1.1.1. *Al conjunto de todos los polinomios en la indeterminada x con coeficientes en K lo denotamos $K[x]$.*

Definición 1.1.2. Sea

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in K[x],$$

definimos el grado de $p(x)$, denotado $\partial(p(x))$, como aquel $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que a_m es el último coeficiente no nulo.

Ejemplo 1.1.1.

1. *Si* $p(x) = 2 + 3x - 5x^2$ *entonces* $\partial(p(x)) = 2$.
2. *Si* $p(x) = 2x$ *entonces* $\partial(p(x)) = 1$.
3. *Si* $p(x) = 5$ *entonces* $\partial(p(x)) = 0$.
4. *El polinomio nulo no tiene grado.*

Observación 1.1.1.

1. Podemos escribir los polinomios en orden decreciente.
2. Para simplificar la notación podemos escribir $\partial(p)$ en lugar de $\partial(p(x))$.

1.2. SUMA Y MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Definición 1.2.1. Sean

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in K[x],$$

decimos que $p(x) = q(x)$ si y sólo si son idénticos, es decir, $p(x) = q(x) \Leftrightarrow a_i = b_i, \ \forall\, i$.

Ejemplo 1.2.1. *Sean* $p(x) = (a-b)x^4 + (c-1)x^3 + (d+c)x$ *y* $q(x) = 7x^3 + (2d+b)x^2 - 2x$ *dos polinomios definidos en los reales, determine* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *para que* $p(x) = q(x)$.

Solución. Se debe cumplir

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ c - 1 = 7 \\ d + c = -2 \\ 2d + b = 0 \end{cases}$$

es decir, para $a = 20$, $b = 20$, $c = 8$, $d = -10$.

Definición 1.2.2. Sean

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in K[x],$$

entonces

1. $p(x) + q(x) = d(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ tal que $c_i = a_i + b_i, \ \forall\, i$.

2. $p(x) \cdot q(x) = e(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i$ tal que $d_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$.

Observación 1.2.1. Se puede demostrar que

a) $\partial(p+q) \leq \text{máx}\,\{\partial(p), \partial(q)\}$ si $\partial(p+q)$ existe.

b) $\partial(p \cdot q) = \partial(p) + \partial(q)$.

Ejemplo 1.2.2. *Sean* $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x$, $q(x) = 2x^2 + 5x - 2 \in \mathbb{R}[x]$. *Si* $p(x) \cdot q(x) = r(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i$, *determine* d_2.

Solución.

$$\begin{aligned} d_2 &= \sum_{k=0}^{2} a_k b_{2-k} \\ &= a_0 b_{2-0} + a_1 b_{2-1} + a_2 b_{2-2} \\ &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ &= 0 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + (-2) \cdot (-2) \\ &= 19. \end{aligned}$$

Notemos que $r(x) = 8x^5 + (20-4)x^4 + (-8-10-6)x^3 + (4+15)x^2 + (-6)x$.

Teorema 1.2.1. Algoritmo de Euclides. *Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $q(x) \neq 0$, entonces existen $s(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$, únicos, tal que $p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x)$ donde $r(x) = 0 \vee \partial(r) < \partial(q)$.*

Observación 1.2.2. Al polinomio $s(x)$ lo llamamos cuociente y al polinomio $r(x)$ lo llamamos resto.

Ejemplo 1.2.3. *Sea $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4$, $q(x) = x - 2 \in \mathbb{R}[x]$. Determine el resto y el cuociente que se produce al dividir $p(x)$ por $q(x)$.*

Solución.

$$\begin{array}{l} x^3 + 2x^2 - 3x - 4 : x - 2 = x^2 + 4x + 5 \\ \underline{\mp x^2 \pm 2x^2} \\ \quad 4x^2 - 3x - 4 \\ \quad \underline{\mp 4x^2 \pm 8x} \\ \qquad 5x - 4 \\ \qquad \underline{\mp 5x \pm 10} \\ \qquad\qquad 6 \end{array}$$

Hemos obtenido $s(x) = x^2+4x+5$, $r(x) = 6$ de donde podemos escribir $x^3+2x^2-3x-4 = (x^2+4x+5)(x-2)+6$ o equivalentemente

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 4}{x - 2} = x^2 + 4x + 5 + \frac{6}{x - 2}$$

Observación 1.2.3. Cuando el polinomio divisor es de la forma $x - a$ podemos efectuar la división mediante "división sintética", método que mostramos con el desarrollo del mismo problema anterior, tenemos

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 2 \\ \hline & 2 & 8 & 10 & \\ \hline 1 & 4 & 5 & |6 & \end{array}$$

Note que el cuociente es $s(x) = x^2 + 4x + 5$ y el resto es $r(x) = 6$.

1.3. TEOREMA DEL RESTO

Definición 1.3.1. $a \in \mathbb{R}$ es un cero de $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ o raíz de la ecuación $p(x) = 0$ si y sólo si $p(a) \equiv 0$.

Ejemplo 1.3.1. *$a = -3$ es raíz de $p(x) = x^2 + x - 6 = 0$ ya que*

$$p(-3) = (-3)^2 + (-3) - 6 \equiv 0.$$

Teorema 1.3.1. Teorema del resto. *Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces el resto que se produce al dividir $p(x)$ por $x - a$ es $p(a)$.*

Demostración. Por el Algoritmo de Euclides tenemos $p(x) = (x - a)s(x) + r(x)$ donde $r(x) = 0$ ó $\partial(r(x)) < \partial(x - a) = 1$; esto nos indica que en cualquier caso el resto es una constante, es decir $r(x) = r = cte$, así $p(x) = (x - a)s(x) + r$; es inmediato concluir que $p(a) = (a - a)s(a) + r = r$. $\square$

Ejemplo 1.3.2. *Si $p(x) = x^{30} - 1$, $q(x) = x - 1$ entonces al dividir $p(x)$ por $q(x) = x - 1$ el resto que se produce es $r = p(1) = 1^{30} - 1 = 0$, de donde, la división es exacta.*

Ejemplo 1.3.3. *Determine $k \in \Re$ para que:*

a) *$p(x) = 2x^3 + kx^2 - 3x - 4$ sea divisible (exactamente) por $x + 1$.*

b) *$p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + kx - 7$ sea divisible por $x - 2$ y tenga resto 3.*

Solución.

a) Se debe cumplir que $p(-1) = 0$. Como $p(-1) = -2 + k + 3 - 4 = 0$ entonces $k = 3$.

b) Se debe cumplir que $p(2) = 3$. Como $p(2) = 16 + 16 - 12 + 2k - 7 = 3$ entonces $k = -5$.

Ejemplo 1.3.4. *Sean 1 y 5 el resto que se produce al dividir $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ por $x + 2$ y $x - 3$ respectivamente. Determine el resto que se produce al dividir $p(x)$ por el producto $(x + 2)(x - 3)$.*

Solución. Usando el Algoritmo de Euclides tenemos que $p(x) = (x+2)(x-3)q(x) + r(x)$ donde el resto $r(x)$ debe ser a lo más de grado 1; sea $r(x) = ax + b$ entonces $p(x) = (x + 2)(x - 3)q(x) + (ax + b)$, debemos determinar $a, b \in \mathbb{R}$.

Como $p(-2) = 1$ y $p(3) = 5$ entonces el sistema que se produce es

$$\begin{cases} -2a + b = 1 \\ 3a + b = 5 \end{cases}$$

de donde, resolviendo obtenemos $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{13}{5}$, así, el resto que se produce al dividir $p(x)$ por $(x + 2)(x - 3)$ es $r(x) = \frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$.

Teorema 1.3.2. *$a \in \mathbb{R}$ es un cero de $p(x) \in \mathbb{R}[x] \Leftrightarrow (x-a)$ es factor de $p(x)$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si $a \in \mathbb{R}$ es cero de $p(x)$ entonces $p(a) = 0$, por otro lado, como $p(x) = (x-a)s(x)+r$ entonces $p(a) = (a-a)s(x) + r = 0$ de donde $r = 0$, así, $p(x) = (x-a)s(x)$, lo que nos indica que $(x-a)$ es factor de $p(x)$.

$\Leftarrow$) Si $(x-a)$ es factor de $p(x)$, entonces $p(x) = (x-a)s(x)$, así, $p(a) = (a-a)s(x) = 0$, de donde $a \in \mathbb{R}$ es cero de $p(x)$.

□

Ejemplo 1.3.5. *Encuentre una ecuación mónica de grado mínimo cuyas raíces sean* $2, 0, 1, -5$.

Solución. Por el Teorema anterior concluimos que $x-2$, $x-0$, $x-1$, $x+5$ son factores de $p(x)$, así, el polinomio pedido es $p(x) = x(x-2)(x-1)(x+5)$.

Ejemplo 1.3.6. *Determine A y B de modo que $p(x) = x^4 + x^3 + Ax^2 + Bx + 30$ sea divisible tanto por $x-2$ como por $x+3$.*

Solución. Como $p(x)$ es divisible por $x-2$ entonces $x = 2$ es un cero de $p(x)$, así, $p(2) = 16 + 8 + 4A + 2B + 30 = 0$, es decir, $4A + 2B = -54$.

De manera análoga, $p(-3) = 81 - 27 + 9A - 3B + 30 = 0$, de donde $9A - 3B = -84$.

El sistema que se produce es

$$\begin{cases} 4A + 2B = -54 \\ 9A - 3B = -84 \end{cases}$$

y la solución es $A = -11$, $B = -5$.

1.4. NÚMERO DE RAÍCES DE UNA ECUACIÓN

Demostraremos que toda ecuación polinomial de grado n tiene n raíces, para ello necesitamos el siguiente teorema.

Teorema 1.4.1. Teorema Fundamental del Álgebra, TFA. *La ecuación polinomial*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$$

tiene, por lo menos, una raíz real o compleja.

La demostración del Teorema está fuera del alcance de esta sección y lo usaremos para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1.4.2. *La ecuación polinomial*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$$

tiene, exactamente n raíces.

Demostración. Por el TFA, la ecuación planteada tiene al menos una raíz, sea ella r_1; entonces $x - r_1$ es factor de $p(x)$, de donde $p(x) = (x - r_1)q_1(x) = 0$, con $q_1(x)$ de grado tal que el coeficiente de x^{n-1} es a_n.

Aplicando el TFA a

$$q_1(x) = a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0,$$

afirmamos que existe al menos una raíz, sea ella $x = r_2$, así, $q_1(x) = (x - r_2)q_2(x)$ de donde $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)q_2(x) = 0$.

Si repetimos el proceso obtenemos $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n) = 0$, de donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son raíces de la ecuación.

Demostraremos ahora que esas raíces son las únicas; supongamos que r es otra raíz de $p(x) = 0$, entonces debería cumplirse que $p(r) = 0$, sin embargo esto último no es cierto ya que $p(r) = a_n(r - r_1)(r - r_2)\cdots(r - r_n) \neq 0$. $\square$

Nos debe motivar el determinar las raíces de una ecuación polinomial, el siguiente teorema nos ayuda en tal intento.

1.5. RAÍCES RACIONALES

Teorema 1.5.1. *Si una fracción irreducible $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ es raíz de la ecuación*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0; \quad a_n \neq 0,$$

entonces c es divisor de $a_0(c|_{a_0})$ y d es divisor de $a_n(d|_{a_n})$.

Demostración. Como $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ es raíz de la ecuación

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

entonces $p\left(\frac{c}{d}\right) = 0$,

$$\begin{aligned}
p\left(\frac{c}{d}\right) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_n\left(\frac{c}{d}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{c}{d}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{c}{d}\right) + a_0 = 0 \\
&\Rightarrow \quad a_n\frac{c^n}{d^n} + a_{n-1}\frac{c^{n-1}}{d^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{c}{d} + a_0 = 0 \;/\; d^n \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1}d + \cdots + a_1 c d^{n-1} + a_0 d^n = 0 \qquad (1.1) \\
&\Rightarrow \quad a_{n-1}c^{n-1}d + \cdots + a_1 c d^{n-1} + a_0 d^n = -a_n c^n.
\end{aligned}$$

Como d divide la primer lado de la igualdad anterior entonces d divide a $-a_n c^n$, y dado que d no divide a c entonces d debe dividir a a_n.

Análogamente, de (1.1) tenemos

$$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} d + \cdots + a_1 c d^{n-1} = -a_0 d^n,$$

de lo cual concluimos que c debe dividir a a_0. $\square$

Observación 1.5.1.

1. El Teorema nos entrega las posibles raíces racionales de la ecuación.
2. Usando la contrapositiva concluimos que si d no divide a a_n ó c no divide a a_0 entonces $\frac{c}{d}$ no es raíz de la ecuación.

Ejemplo 1.5.1. *Resuelva la ecuación* $p(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12 = 0$.

Solución. Las posibles raíces racionales de la ecuación son $\frac{c}{d}$ donde $c|_{12}$ y $d|_2$.

Como $c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ y $d \in \{\pm 1, \pm 2\}$ entonces las posibles raíces racionales son

$$\frac{c}{d} \in \left\{ 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2} \right\}.$$

Ahora debemos determinar, por reemplazo, alguna raíz.

Como $p(1) = 6 \neq 0$ entonces $x = 1$ no es raíz de la ecuación.

Como $p(-1) = 2 + 1 - 11 - 4 + 12 = 0$ entonces $x = -1$ es raíz de la ecuación, así entonces

$$p(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12 = (x + 1)s(x);$$

este polinomio $s(x)$ lo podemos determinar por división sintética; tenemos

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & -11 & 4 & 12 & -1 \\ \hline & -2 & 3 & 8 & -12 & \\ \hline 2 & -3 & -8 & 12 & |0 & \end{array}$$

de donde $s(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$, así

$$p(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12 = (x + 1)(2x^3 - 3x^2 - 8x + 12) = 0.$$

Repetimos el proceso para la ecuación $s(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$, las posibles raíces racionales son

$$\frac{c}{d} \in \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2} \right\}$$

y obtenemos $s(2) = 16-12-16+12 = 0$, de donde $s(x) = 2x^3-3x^2-8x+12 = (x-2)m(x)$, este $m(x)$ lo obtenemos por división sintética, tenemos,

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & -8 & 12 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & -12 & \\ \hline 2 & 1 & -6 & |0 & \end{array}$$

de donde $m(x) = 2x^2 + x - 6$, así, $s(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = (x-2)(2x^2 + x - 6)$ y entonces

$$p(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12 = (x+1)(x-2)(2x^2 + x - 6) = 0.$$

Como el polinomio cuadrático $2x^2 + x - 6$ se factoriza por $(2x-3)(x+2)$ entonces

$$p(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12 = (x+1)(x-2)(2x-3)(x+2) = 0$$

de donde las raíces de la ecuación son $x = -1$, $x = 2$, $x = \frac{3}{2}$, $x = -2$.

Ejemplo 1.5.2. *Resuelva la ecuación* $4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1 = 0$.

Solución. Como $c \in \{\pm 1\}$ y $d \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ entonces las posibles raíces racionales de la ecuación $p(x) = 0$ son

$$\frac{c}{d} \in \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4} \right\}.$$

Dado que $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 0$ entonces $x = \frac{1}{2}$ es raíz de la ecuación y luego, $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ es factor de $p(x)$, así, $p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) s(x)$.

Al dividir $p(x)$ por $x - \frac{1}{2}$ obtenemos $s(x) = 4x^3 - 2x^2 - 6x - 2$, de donde

$$p(x) = 4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^3 - 2x^2 - 6x - 2) = 0.$$

Si aplicamos otra vez el método a la ecuación $s(x) = 4x^3 - 2x^2 - 6x - 2 = 0$, las posibles raíces racionales son

$$\frac{c}{d} \in \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4} \right\}.$$

Como $s\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ entonces $s(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) m(x)$ y, al dividir $s(x)$ por $x + \frac{1}{2}$ obtenemos $m(x) = 4x^2 - 4x - 4$.

Al resolver la ecuación $m(x) = 0$ obtenemos $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Finalmente, las raíces pedidas son $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1.6. NATURALEZA DE LAS RAÍCES

Teorema 1.6.1. *Si un número complejo $z = a + bi$ es raíz de la ecuación polinomial*

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

entonces el conjugado $\bar{z} = a - bi$ también es raíz de la ecuación.

Demostración. Como $z = a + bi$ es raíz de la ecuación entonces $p(z) = 0$. Notamos que las potencias pares de bi producen números reales y las potencias impares de bi producirán expresiones imaginarias.

Si denotamos por A a la suma algebraica de los números reales y por Bi a la suma algebraica de los números imaginarios entonces $p(z) = 0$ se puede escribir como $A+Bi = 0$, de donde $A = B = 0$.

Si ahora analizamos $p(\bar{z})$ las potencias pares de $-bi$ tienen el mismo valor que las potencias pares de bi y las potencias impares de $-bi$ sólo diferirán de las potencias impares de bi en el signo, así $p(\bar{z}) = A - Bi$; como $A = B = 0$ entonces $p(\bar{z}) = 0$, por lo cual $\bar{z} = a - bi$ también es raíz de la ecuación $p(x) = 0$. □

Ejemplo 1.6.1. *Si $x = 1+i$ es raíz de la ecuación $p(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$ determine las otras raíces de la ecuación.*

Solución. Como $x = 1 + i$ es raíz de la ecuación entonces $x = 1 - i$ también es raíz de la ecuación, así $x - (1 + i)$ y $x - (1 - i)$ son factores de $p(x)$, en consecuencia podemos escribir $p(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = (x - (1 + i))(x - (1 - i))q(x) = 0$.

Como $(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = x^2 - 2x + 2$ entonces el polinomio se puede escribir como $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = (x^2 - 2x + 2)q(x)$, de donde $q(x) = \frac{x^3-4x^2+6x-4}{x^2-2x+2} = x - 2$.

Tenemos $p(x) = (x - (1 + i))(x - (1 - i))(x - 2) = 0$, por lo tanto las raíces pedidas son $x = 1 + i$, $x = 1 - i$, $x = 2$.

Ejemplo 1.6.2. *Determine $a, b \in \mathbb{R}$ para que $p(x) = x^4 + 2x^3 + ax + b = 0$ tenga raíz $z = 1 + i$.*

Solución. Si $z = 1+i$ es raíz de $p(x) = 0$ entonces $\bar{z} = 1-i$ también es raíz, así, $x-(1+i)$ y $x - (1 - i)$ son factores de $p(x)$, es decir, $p(x) = (x - (1 + i))(x - (1 - i))s(x)$; como $(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = x^2 - 2x + 2$ entonces $p(x) = (x^2 - 2x + 2)s(x)$.

Al dividir $x^4 + 2x^3 + ax + b$ por $x^2 - 2x + 2$ el resto que se produzca debe ser igual a cero y, allí obtenemos la ecuación para determinar $a, b \in \mathbb{R}$ pedidos; tal resto es $(12 + a - 8)x + (b - 12)$, así, $(a + 4)x + (b - 12) = 0$, de donde $a = -4$, $b = 12$.

Este problema también podemos resolverlo usando la teoría de números complejos; tenemos que, como $z = 1 + i$ es raíz de $p(x) = x^4 + 2x^3 + ax + b = 0$ entonces se cumple

$$(1 + i)^4 + 2(1 + i)^3 + a(1 + i) + b = 0 + 0i,$$

calculemos las potencias allí señaladas, usando De Moivre, tenemos:

$$\begin{aligned}
(1 + i)^4 &= \left[\sqrt{2}(\cos(45^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ))\right]^4 \\
&= 4(\cos(180^\circ) + i \operatorname{sen}(180^\circ)) \\
&= 4(-1 + 0i) \\
&= -4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 + i)^3 &= \left[\sqrt{2}(\cos(45^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ))\right]^3 \\
&= 2\sqrt{2}(\cos(135^\circ) + i \operatorname{sen}(135^\circ)) \\
&= 2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= -2 + 2i,
\end{aligned}$$

así, la ecuación queda $-4 + 2(-2 + 2i) + a(1 + i) + b = 0 + 0i$, de aquí concluimos

$$\begin{cases} -4 - 4 + a + b = 0 \\ 4 + a = 0 \end{cases}$$

es decir, $a = -4$, $b = 12$.

Ejemplo 1.6.3. *Sea $p(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36 \in \mathbb{C}[x]$ tal que $bi, b \neq 0$ es raíz de $p(x) = 0$; determine las otras raíces de la ecuación.*

Solución. En primer lugar debemos determinar el valor de b.

Como bi es raíz de $p(x) = 0$ entonces $(bi)^4 - 3(bi)^3 + 5(bi)^2 - 27(bi) - 36 = 0$, de esto concluimos que $b^4i^4 - 3b^3i^3 + 5b^2i^2 - 27bi - 36 = 0 + 0i$, así, podemos deducir el siguiente sistema

$$\begin{cases} b^4 - 5b^2 - 36 = 0 \\ 3b^3 - 27b = 0 \end{cases}$$

de la segunda ecuación obtenemos $3b(b^2 - 9) = 0$; como $b \neq 0$ entonces $b^2 - 9 = 0$ de donde $b = \pm 3$.

Para cualquiera que sea el valor de b concluimos que $3i$ y $-3i$ son ceros de $p(x)$, así, $p(x) = (x - 3i)(x + 3i)s(x)$.

Como $(x - 3i)(x + 3i) = x^2 + 9$ entonces el cuociente $s(x)$ se obtiene dividiendo $p(x)$ por $x^2 + 9$; tal $s(x)$ es $s(x) = x^2 - 3x - 4$, de donde $p(x) = (x - 3i)(x + 3i)(x^2 - 3x - 4)$, resolviendo la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$ conseguimos $x = 4$, $x = -1$.

Las raíces de $p(x) = 0$ son: $3i$, $-3i$, 4, -1.

1.7. ALGUNAS AYUDAS PARA ENCONTRAR RAÍCES

Cota superior de las raíces

Si en la ecuación polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

con coeficientes reales se cumple que $a_n > 0$, el primer coeficiente negativo esta precedido por r coeficientes positivos o nulos y si a_k es el coeficiente negativo de mayor valor absoluto entonces cada raíz α de la ecuación es menor que

$$1 + \sqrt[r]{\frac{|a_k|}{a_n}}.$$

Ejemplo 1.7.1. *En la ecuación real*

$$p(x) = x^5 + 2x^4 - 18x^3 - 8x^2 + 41x + 30 = 0$$

tenemos que $r = 3$, $a_k = -18$, $a_n = 1$, así, toda raíz α es tal que

$$\alpha < 1 + \sqrt[2]{\frac{|-18|}{1}} = 1 + \sqrt[3]{18} \approx 3{,}62.$$

Note que las posibles raíces racionales de la ecuación son $\frac{c}{d} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 15, \pm 30\}$ *y que el acotamiento de las raíces por lo menos elimina* 4 *posibles raíces; en definitiva las raíces son* $2, 3, -1, -1, -5$.

Regla de los signos de Descartes

Definición 1.7.1. Sea la ecuación polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

con coeficientes reales; decimos que dos coeficientes consecutivos a_k, a_p tienen una variación de signo si $a_k \cdot a_p < 0$.

Denotamos por V al número de variaciones de signo de $p(x) = 0$.

Ejemplo 1.7.2. *La ecuación* $3x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 5 = 0$ *tiene dos variaciones de signo, en tanto que, la ecuación* $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ *tiene cero variaciones de signo.*

Regla de los signos de Descartes. Sea la ecuación polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

con coeficientes reales. Si V es el número de variaciones de signo de $p(x) = 0$ entonces el número P de raíces positivas es P o ese número disminuido en una cantidad par.

El número N de raíces negativas de la ecuación $p(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo de $p(-x) = 0$ o ese número disminuido en una cantidad par.

Ejemplo 1.7.3. *Analice la ecuación* $p(x) = 2x^4 - 5x + 1 = 0$.

Solución. Como $p(x)$ tiene dos variaciones de signo entonces la ecuación tiene 2 raíces positivas o ninguna.

Como $p(-x) = 2(-x)^4 - 5(-x) + 1 = 2x^4 + 5x + 1$ entonces la ecuación $p(x) = 0$ tiene ninguna raíz negativa. Así, la ecuación tiene 2 raíces reales y 2 raíces complejas o 4 raíces complejas.

Como $p(0) = 1$ y $p(1) = -2$ entonces dado que el polinomio es "continuo" concluimos que existe una raíz real en el intervalo $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$, así, en definitiva, la ecuación tiene 2 raíces reales y 2 raíces complejas.

Ejemplo 1.7.4. *Encuentre las raíces de la ecuación* $3x^3 + 11x^2 + 8x - 4 = 0$.

Solución. Las posibles raíces racionales de la ecuación son de la forma $\frac{c}{d}$ tal que c es divisor de -4 y d es divisor de 3; como $c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ y $d \in \{\pm 1, \pm 3\}$ entonces las posibles racionales son tal que

$$\frac{c}{d} \in \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}\right\}.$$

Para decidir cuales de las posibles raíces racionales son, en definitiva, raíces racionales de la ecuación debemos verificar si $m(x) = 0$ donde $m(x) = 3x^3 + 11x^2 + 8x - 4$.

Al verificar, detectamos que $m(-2) = 0$, así, -2 es raíz de la ecuación, es decir, $x + 2$ es factor de $p(x)$ entonces, $3x^3 + 11x^2 + 8x - 4 = (x + 2)s(x)$; debemos determinar el cuociente $s(x)$, lo cual lo realizamos por división sintética, tenemos,

3	11	8	-4	-2
	-6	-10	4	
3	5	-2	$\|0$	

El polinomio buscado es $s(x) = 3x^2 + 5x - 2$ de donde, el polinomio $m(x)$ es $m(x) = (x + 2)(3x^2 + 5x - 2)$ y la ecuación es $m(x) = (x + 2)(3x^2 + 5x - 2) = 0$.

Si resolvemos la ecuación $3x^2 + 5x - 2 = 0$ obtenemos $x = \frac{1}{3}$, $x = -2$ así,

$$3x^3 + 11x^2 + 8x - 4 = (x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2),$$

de donde las raíces de la ecuación son $x = -2$ de multiplicidad 2 y $x = \frac{1}{3}$.

Observación 1.7.1.

1. Si sólo intentáramos ubicar las posibles raíces por simple verificación entonces la raíz de multiplicidad 2 no la habríamos detectado.

2. Notemos que la Regla de los signos de Descartes nos indica que "el número de raíces positivas de la ecuación $m(x) = 3x^3 + 11x^2 + 8x - 4 = 0$ es el número de variaciones de signo de $m(x)$ o ese número disminuido en un número par", como el número de variaciones de signos de $m(x)$ es 1 entonces el número de raíces positivas es 1; por otro lado "el número de raíces negativas de la ecuación $m(x) = 3x^3 + 11x^2 + 8x - 4 = 0$ es el número de variaciones de signo de $m(-x)$ o ese número disminuido en un número par", como $m(-x) = -3x^3 + 11x^2 - 8x - 4$ entonces el número de variaciones de signo es 2 y la cantidad de raíces negativas de la ecuación es 2 o ninguna.

   Dado que el numero de raíces de la ecuación es 3 entonces la posible multiplicidad de las raíces es: 1 raíz positiva y 2 negativas o 1 raíz positiva, 0 raíz negativa y 2 raíces complejas; en definitiva se obtuvo la primera opción.

Método de Aproximaciones Sucesivas

Es posible que, a veces, una ecuación polinomial no tenga raíces racionales, por ejemplo, la ecuación $p(x) = x^3 + x - 4 = 0$ tiene como posibles raíces racionales en el conjunto $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ y ninguna de ellas, en definitiva, es raíz.

Por otro lado, la regla de las variaciones de signo nos indica que la ecuación tiene una raíz real positiva y dos raíces complejas. ¿Cómo obtenemos la raíz real, siendo esta una raíz irracional?.

Para obtener, por aproximación, la raíz real positiva, debemos acotarla por dos enteros consecutivos; como $p(1) = -2$ y $p(2) = 6$ entonces la raíz pedida esta entre 1 y 2.

Un método puede ser el de determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1,2)$ y $(2,6)$ que es de la forma $ax+by+c=0$ y determinar el valor de la variable x cuando $y=0$. El proceso se repite las veces necesarias.

1.8. RELACIONES ENTRE COEFICIENTES Y RAÍCES DE UNA ECUACIÓN

En la ecuación polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

se cumple la siguiente relación entre los coeficientes a_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ y las n raíces r_i,

$$\begin{aligned} -\frac{a_{n-1}}{a_n} &= \text{suma de las raíces de la ecuación} \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} &= \text{suma de los dobles productos de las raíces} \\ -\frac{a_{n-3}}{a_n} &= \text{suma de los triples productos de las raíces} \\ &\vdots \\ (-1)^n\frac{a_0}{a_n} &= \text{producto de las raíces} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.8.1. *Determine $k \in \mathbb{R}$ en la ecuación $x^3 - 7x + k = 0$ para que una de sus raíces sea el doble de otra de ellas.*

Solución. Sean $a, b, 2b$ las raíces con la condición impuesta, entonces se cumple,

$$a + b + 2b = -\frac{0}{1} = 0 \quad ; \quad ab + 2ab + 2b^2 = \frac{-7}{1} = -7 \quad ; \quad 2ab^2 = -\frac{k}{1} = -k.$$

El sistema que debemos resolver es

$$\begin{cases} (1) \;\; a + 3b = 0 \\ (2) \;\; 3ab + 2b^2 = -7 \\ (3) \;\; 2ab^2 = -k \end{cases}$$

De (1) obtenemos $a = -3b$, reemplazando en (2) conseguimos $-9b^2 + 2b^2 = -7$, así, $b = \pm 1$. Si reemplazamos estos valores en (1) entonces,

$b = 1 \Rightarrow a = -3$ de donde, en (3) obtenemos $-k = 2(-3)1^2 = -6$, así, $k = 6$.

$b = -1 \Rightarrow a = 3$ de donde, en (3) obtenemos $-k = 2(3)(-1)^2 = -6$, así, $k = -6$.

Para $k = 6$ y $k = -6$ se produce lo pedido.

Usted puede verificar que

Si $k = 6$, entonces la ecuación es $x^3 - 7x + 6 = 0$, con raíces 1, -3, 2.

Si $k = -6$, entonces la ecuación es $x^3 - 7x - 6 = 0$, con raíces -1, 3, -2.

Ejemplo 1.8.2. *Si a, b, c son las raíces de la ecuación $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ determine el valor de la expresión $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.*

Solución. Como $a + b + c = -\frac{-p}{1} = p$, $\quad ab + ac + bc = \frac{q}{1} = q$, $\quad abc = -\frac{-r}{1} = r$ entonces la expresión

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}$$

debe expresarse en función de p, q, r.

Es inmediato conseguir $a^2b^2c^2 = (abc)^2 = r^2$, por otro lado, para determinar $b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2$ usamos la expresión $(ab + ac + bc)^2$; tenemos

$$\begin{aligned} (ab + ac + bc)^2 &= {}^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 \\ &= a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c), \end{aligned}$$

así, reemplazando los datos obtenemos $q^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2rp$, de donde, $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = q^2 - 2rp$, entonces,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} = \frac{q^2 - 2rp}{r^2}.$$

Ejemplo 1.8.3. *Determine las raíces de $p(x) = 4x^3 - 12x^2 + 3x + 5 = 0$ si estas están en Progresión Aritmética.*

Solución. Sean $\alpha = a - d$, $\beta = a$, $\gamma = a + d$ las raíces (en Progresión Aritmética) de la ecuación, entonces, de $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-12}{4}$ conseguimos $(a - d) + a + (a + d) = 3$, de esta última ecuación obtenemos $a = 1$.

De la relación $\alpha\beta\gamma = -\frac{5}{4}$ conseguimos $(a - d)a(a + d) = -\frac{5}{4}$, es decir, conseguimos la ecuación $(1 - d)(1 + d) = -\frac{5}{4}$. Esta ecuación nos da los resultados $d = \pm\frac{3}{2}$.

Si $d = \frac{3}{2}$ entonces $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{5}{2}$.

Si $d = -\frac{3}{2}$ entonces $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = -\frac{1}{2}$.

1.9. FRACCIONES RACIONALES

1.9.1. Fracciones racionales

De la misma manera que el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales se forma a partir del anillo $\mathbb{Z}$ de los enteros, es posible construir, a partir del anillo $K[x]$ un cuerpo, llamado el cuerpo de las fracciones racionales con coeficientes en K.

Este cuerpo se denota por $K(x)$ y es el conjunto cuociente de $K[x] \times \{K[x] - \{0\}\}$ dado por la relación de equivalencia R

$$(f_1(x), g_1(x))R(f_2(x), g_2(x)) \Leftrightarrow f_1(x)g_2(x) = f_2(x)g_1(x).$$

Una fracción racional en la indeterminada x sobre K es, entonces, una clase de equivalencia representada por el par $(f(x), g(x))$ de polinomios de $K(x)$ en que $g(x) \neq 0$, otro par $(f_1(x), g_1(x))$ representa a la misma fracción racional si y sólo si

$$f(x)g_1(x) = f_1(x)g(x).$$

Al elemento $(f(x), g(x))$, representante de una clase de equivalencia lo denotamos por $\frac{f(x)}{g(x)}$, entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} \Leftrightarrow f(x)b(x) = g(x)a(x).$$

1.9.2. Suma y Multiplicación en $K[x] \times \{K[x] - \{0\}\}$

Definición 1.9.1. En $K[x] \times \{K[x] - \{0\}\}$ definimos las operaciones suma y multiplicación por

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{a(x)}{b(x)} &= \frac{f(x)b(x) + g(x)a(x)}{g(x)b(x)} \\ \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)} &= \frac{f(x)a(x)}{g(x)b(x)}. \end{aligned}$$

Observación 1.9.1. Es fácil verificar que $(K(x), +, \cdot)$ es un cuerpo; el elemento neutro para la adición es la fracción racional nula, denotada por 0, que es la clase de equivalencia del par $\frac{0}{g(x)}$ donde $g(x) \neq 0$; el elemento neutro para la multiplicación, llamada fracción racional unitaria y denotada por 1 es la clase de equivalencia de los pares $\frac{g(x)}{g(x)}$ donde $g(x) \neq 0$.

Teorema y Definición

Para cada fracción racional de $K(x)$ existe un representante $\frac{f(x)}{g(x)}$ tal que los polinomios $f(x), g(x)$ son primos entre si. Todo otro representante con esta propiedad es de la forma $\frac{cf(x)}{cg(x)}$ donde $c \in K(x) - \{0\}$ es polinomio constante.

Este representante único, $\frac{f(x)}{g(x)}$ se llama la forma irreducible de la fracción racional.

1.10. FRACCIONES PARCIALES

Definición 1.10.1. Sea $\frac{f(x)}{g(x)} \in K(x) - \{0\}$, definimos el grado de $\frac{f(x)}{g(x)}$, denotado por $\partial\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ por $\partial\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \partial(f(x)) - \partial(g(x))$.

La fracción racional $\frac{f(x)}{g(x)}$ es propia si $\partial\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) < 0$, en caso contrario se dice que es impropia.

Observación 1.10.1. Se puede demostrar que el grado de una fracción racional es independiente de la elección del representante de ella.

Teorema 1.10.1. *Sean $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{a(x)}{b(x)}$ fracciones racionales propias entonces $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{a(x)}{b(x)}$ es propia.*

Demostración. Usted debe demostrar que $\partial\left(\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{a(x)}{b(x)}\right)<0$. $\square$

Teorema 1.10.2. *Toda fracción racional se puede expresar, de manera única, como la suma de un polinomio y una fracción propia o la fracción nula.*

Demostración. Sea $\frac{f(x)}{g(x)} \in K(x)$, como $g(x)\neq 0$ aplicamos el algoritmo de la división a $f(x)$ y $g(x)$ obteniendo $f(x)=e(x)\cdot g(x)+r(x)$ donde

$$r(x)=\begin{cases}0\\ \partial(r(x))<\partial(g(x))\end{cases}$$

es inmediato concluir que $\frac{f(x)}{g(x)}=e(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$ tal que $e(x)\in K[x]$ y $\partial\left(\frac{r(x)}{g(x)}\right)<0$; el polinomio $e(x)$ se llama la parte entera de la fracción racional $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que $\frac{f(x)}{g(x)}=e_1(x)+\frac{r_1(x)}{g(x)}$ donde

$$r_1(x)=\begin{cases}0\\ \partial(r_1(x))<\partial(g(x))\end{cases}$$

Si $e(x)\neq e_1(x)$ entonces

$$\partial(e(x)-e_1(x))=\partial\left(\frac{r(x)}{g(x)}-\frac{r_1(x)}{g(x)}\right)<0$$

lo que es una contradicción, así, $e(x)=e_1(x)$ y consecuentemente $\frac{r(x)}{g(x)}=\frac{r_1(x)}{g(x)}$. $\square$

Teorema 1.10.3. *Considere la fracción racional propia $\frac{f(x)}{g(x)}\in K(x)$ tal que $g(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$ en que los polinomios $g_1(x),g_2(x)$ son no nulos y primos entre si, entonces existen polinomios únicos $f_1(x),f_2(x)$ tal que*

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

donde $\partial(f_1(x))<\partial(g_1(x))$ y $\partial(f_2(x))<\partial(g_2(x))$.

Demostración. Como siempre existen polinomios $u_1(x),u_2(x)$ tal que $1=u_1(x)g_2(x)+u_2(x)g_1(x)$, entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)u_1(x)}{g_1(x)}+\frac{f(x)u_2(x)}{g_2(x)}.$$

Denotando por $e_1(x)$ y $e_2(x)$ las partes enteras del primer y segundo sumando respectivamente tenemos

$$\frac{f(x)u_1(x)}{g_1(x)}=e_1(x)+\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

con $\partial\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\right) < 0$ y

$$\frac{f(x)u_2(x)}{g_2(x)} = e_2(x) + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

con $\partial\left(\frac{f_2(x)}{g_2(x)}\right) < 0$, entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = e_1(x) + e_2(x) + \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

Como $\partial\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) < 0$ y $\partial\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}\right) < 0$ entonces $e_1(x) + e_2(x) = 0$ de donde,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

donde $\partial\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\right) < 0$ y $\partial\left(\frac{f_2(x)}{g_2(x)}\right) < 0$. □

En el Teorema anterior y en las siguientes generalizaciones se supone que $\frac{f(x)}{g(x)}$ es una fracción irreducible.

Teorema 1.10.4. *Sea la fracción racional propia* $\frac{f(x)}{g(x)} \in K(x)$ *tal que* $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdots g_n(x)$ *en que* $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ *son polinomios no nulos y de dos en dos son primos relativos entre si, entonces existen polinomios* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *tal que*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \cdots + \frac{f_n(x)}{g_n(x)}$$

donde $\partial(f_i(x)) < \partial(g_i(x))$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. Por inducción. □

Teorema 1.10.5. *Considere la fracción racional propia* $\frac{f(x)}{g(x)} \in K(x)$ *tal que*

$$g(x) = [g_1(x)]^{m_1} \cdot [g_2(x)]^{m_2} \cdots [g_n(x)]^{m_n}$$

en la que $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ *son polinomios no nulos y de dos en dos son primos relativos entre si y* $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, *entonces existen polinomios únicos* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *tal que*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{[g_1(x)]^{m_1}} + \frac{f_2(x)}{[g_2(x)]^{m_2}} + \cdots + \frac{f_n(x)}{[g_n(x)]^{m_n}},$$

donde $\partial(f_i(x)) < \partial(g_i(x))$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. Si $g_i(x), g_j(x)$, $i \neq j$ son primos relativos entonces $[g_i(x)]^{m_i}$ y $[g_j(x)]^{m_j}$ también lo son y tenemos el teorema anterior. □

Observación 1.10.2.

1. Estos teoremas indican que la fracción racional propia $\frac{f(x)}{g(x)}$ se ha expresado como suma de fracciones parciales.

2. El caso de la fracción parcial de la forma $\frac{f(x)}{[g(x)]^m}$, $m \in \mathbb{N}$, puede ser susceptible de la descomposición
$$\frac{f(x)}{[g(x)]^m} = \frac{a_1(x)}{g(x)} + \frac{a_2(x)}{[g(x)]^2} + \cdots + \frac{a_m(x)}{[g(x)]^m}$$
en que $\partial(a_i(x)) < \partial(g_i(x))$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ó $a_i(x) = 0$.

Demostración. Por inducción.

Si $m = 1$ entonces $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Para $m = 2$ aplicamos el algoritmo de la división a los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ obteniendo $\frac{f(x)}{g(x)} = a_1(x) + \frac{a_2(x)}{g(x)}$ donde $\partial(a_2(x)) < \partial(g(x))$, de aquí concluimos que
$$\frac{f(x)}{[g(x)]^2} = \frac{a_1(x)}{g(x)} + \frac{a_2(x)}{[g(x)]^2}.$$
Ya tenemos visto el método, usted puede completar la inducción. □

1.10.1. Aplicación en $C[x]$

Como los únicos polinomios irreducibles en $C[x]$ son los polinomios de grado 1 entonces toda fracción racional propia $\frac{f(x)}{g(x)} \in C[x]$ se puede decomponer en suma de fracciones parciales de la forma
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{A_{1i}}{(x-a_1)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{m_n} \frac{A_{ni}}{(x-a_n)^i}$$
en que $A_{1i}, A_{2i}, \ldots, A_{ni} \in C$ y donde
$$g(x) = (x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_m)^{m_n}; \quad m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}.$$

1.10.2. Aplicación en $R[x]$

En $R[x]$ los únicos polinomios irreducibles son los polinomios de grado 1 y los polinomios cuadráticos $ax^2 + bx + c$ donde $b^2 - 4ac < 0$.

Así, toda fracción racional $\frac{f(x)}{g(x)} \in R[x]$ se puede descomponer en suma de fracciones parciales de la forma
$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \sum_{i=1}^{m_1} \frac{A_{1i}}{(x-a_1)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{m_n} \frac{A_{ni}}{(x-a_n)^i} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{r_1} \frac{B_{1j}x + C_{1j}}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{r_p} \frac{B_{pj}x + C_{pj}}{(a_px^2 + b_px + c_p)^j},\end{aligned}$$

donde

$$g(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdot (x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_n)^{m_n} (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{r_1} \cdots (a_p x^2 + b_p x + c_p)^{r_p}$$

y los coeficientes $A_{1i}, \ldots, A_{ni}, B_{1j}, \ldots, B_{pj}, C_{ij}, \ldots, C_{pj}$ son números reales.

Ejemplo 1.10.1. *Exprese como suma de fracciones parciales la fracción racional* $\frac{x+1}{x^3+x} \in R[x]$.

Solución. Como $x^3 + x = x\left(x^2+1\right)$ y x^2+1 es irreducible en $R[x]$ entonces la descomposición es

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Debemos determinar los números reales A, B, C; multiplicando la última igualdad por $x(x^2+1)$ obtenemos,

$$x + 1 = A(x^2+1) + (Bx + C)x.$$

Si $x = 0$ concluimos $1 = A$.

Si, por ejemplo, $x = 1$ entonces $2 = 2A + (B + C)$, es decir, $B + C = 0$ con $A = 1$.

Si $x = -1$ entonces $0 = 2A + (-1)(-B + C)$ de donde $B - C = -2$.

Resolviendo el sistema formado por las dos últimas ecuaciones obtenemos $B = -1$, $C = 1$, de donde

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}.$$

Ejemplo 1.10.2. *Exprese como suma de fracciones parciales la fracción racional* $\frac{x+1}{x^3+x} \in C(x)$.

Solución. Como $x^3 + x = x(x^2+1) = x(x+i)(x-i)$ entonces

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+i} + \frac{C}{x-i},$$

debemos determinar los números complejos A, B, C.

Al multiplicar la última expresión por $x(x+i)(x-i)$ obtenemos

$$x + 1 = A(x+i)(x-i) + Bx(x-i) + Cx(x+i).$$

Si $x = 0$ entonces $1 = A(-i^2)$ de donde $A = 1$.

Si $x = i$ entonces $1 + i = Ci(2i)$, es decir, $1 + i = -2C$ de donde $C = \frac{1+i}{-2}$.

Si $x = -i$ entonces $1 - i = B(-i)(-2i)$, es decir, $1 - i = -2B$ de donde $B = \frac{1-i}{-2}$.

Así,

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{x+i} + \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{x-i}.$$

1.11. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1.1. Considere los polinomios $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 3$, $q(x) = 3x^2 + 6x - 2 \in \mathbb{R}[x]$ y

$$p(x) \cdot q(x) = r(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \qquad p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_1 x^i.$$

Determine, usando las definiciones correspondientes

a) d_2.

b) c_4.

Ejercicio 1.2. Sean $p(x) = 4 + 3x + 3x^2$, $q(x) = 3 + 2x + 4x^2 \in \mathbb{Z}_5[x]$, determine

a) $p(x) + q(x)$. Resp. $2 + 2x^2$.

b) $p(x) \cdot q(x)$.

Ejercicio 1.3. Verifique que, en $\mathbb{Z}_5[x]$ se cumple

a) $(x-1)(x^3 + 4x^2 4x + 1) = x^4 + 3x^3 + 2x + 4$.

b) $(x-1)(x+1) = x^2 + 4$.

Ejercicio 1.4. Demuestre que

a) $\partial(p+q) \leq \text{máx}\,\{\partial(p), \partial(q)\}$ si $\partial(p+q)$ existe.

b) $\partial(p \cdot q) = \partial(p) + \partial(q)$.

Ejercicio 1.5. Demuestre que

a) $(K[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

b) El anillo $(K[x], +, \cdot)$ no tiene divisores del cero.

c) El anillo $(K[x], +, \cdot)$ no es un cuerpo.

Ejercicio 1.6. Usando el Teorema del Resto demuestre el enunciado dado, si $n \in \mathbb{Z}^+$.

a) $x^n - a^n$ es divisible exactamente por $x + a$ si n es par.

b) $x^n + a^n$ es divisible exactamente por $x + a$ si n es impar.

c) $x^n + a^n$ no es divisible exactamente por $x + a$ si n es par.

d) $x^n + a^n$ no es divisible exactamente por $x - a$ si n es par.

Ejercicio 1.7. En los siguientes ejercicios obtenga el cuociente y el resto usando la división sintética.

a) $(x^3 + 4x^2 + 7x - 2) \div (x + 2)$. Resp. $x^2 + 2x + 3,\ -8$.

b) $(x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 11x - 7) \div (x - 3)$.

c) $(x^6 - x^4 + x^2 - 2) \div (x - 1)$. Resp. $x^5 + x^4 + x + 1,\ -1$.

d) $(4x^4 - 3x^2 + 3x + 7) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$. Resp. $4x^3 - 2x^2 - 2x + 4,\ 5$.

Ejercicio 1.8. Demuestre que $x-1$ y $x+2$ son factores de $p(x) = x^4+2x^3-7x^2-8x+12$ y determinar los factores restantes. Resp. $x - 2,\ x + 3$.

Ejercicio 1.9. Compruebe que dos de las raíces de la ecuación $x^4+x^3-16x^2-4x+48 = 0$ son 2 y -4 y halle las raíces restantes. Resp. $3,\ -2$.

Ejercicio 1.10. Use la división sintética para hallar el cuociente y el resto al dividir el polinomio $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x + 3$ por $2x + 1$.

Sugerencia. Efectúe la división sintética dividiendo por $x+\frac{1}{2}$ y luego divida el cuociente por 2. Resp. $x^3 - 3x^2 + 3x - 2,\ 5$.

Ejercicio 1.11. Determine $p(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$, mónico de grado 3 tal que $x - 1$, $x - 2$ son factores de $p(x)$ y además $p(4) = p(3)$. Resp. $(x - 1)(x - 2)(x + 6) = (x + 6)^2(x + 5)$.

Ejercicio 1.12. Determine si $x - 3$ es factor de $p(x) = x^4 + x^3 + x + 4$ en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$.
Respuesta,

$p(3) = 115$ en $\mathbb{Q}[x]$, luego no es factor.

$p(3) = 1$ en $\mathbb{Z}_3[x]$, luego no es factor.

$p(3) = 0$ en $\mathbb{Z}_5[x]$, luego si es factor.

Ejercicio 1.13. Use el Teorema del resto para determinar el valor de k que hace que el polinomio $3x^3 - 2x^2 + kx - 8$ sea divisible exactamente por $x - 2$. Resp. $k = -4$.

Ejercicio 1.14. Halle el valor de k para que al dividir el polinomio $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + kx - 7$ por $x - 2$, el resto sea 3. Resp. $k = -5$.

Ejercicio 1.15. Halle los valores de a y b que hagan que 2 y -3 sean raíces de la ecuación $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 30 = 0$.

Ejercicio 1.16. Determine a, b, c de modo que $(x-3)(x+1)(x-1)$ sea factor de $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$. Resp. $a = 8$, $b = 5$, $c = -6$.

Ejercicio 1.17. Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Al dividir $p(x)$ tanto por $x + 2$ como por $x + 3$ el resto que se produce es cero; pero al dividir por $x - 1$ el resto es -12. Calcule el valor de $A = 14a - 4b + 3c$. Resp. $a = 3$, $b = -4$, $c = -12$.

Ejercicio 1.18. Al dividir un polinomio $p(x)$ separadamente por $x - 1$ y $x - 2$ se obtiene como resto 5 y 3 respectivamente. Calcule el resto que se produce al dividir $p(x)$ por el producto $(x-1)(x-2)$. Resp. $-2x + 7$.

Ejercicio 1.19. En cada uno de los ejercicios siguientes, compruebe que la ecuación dada tiene como raíces los valores indicados de r, y halle las raíces restantes.

a) $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$; $r = 2$. Resp. $2 \pm i$.

b) $x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 18 = 0$; $r = 3, -2$. Resp. $\pm\sqrt{3}$.

Ejercicio 1.20. Compruebe que la ecuación $x^4 - 11x^2 - 12x + 4 = 0$ tiene la raíz doble -2 y halle las restantes raíces. Resp $2 \pm \sqrt{3}$.

Ejercicio 1.21. En cada uno de los siguientes ejercicios, se dan unas raíces de la ecuación. Halle las raíces restantes.

a) $x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$; $1 - i$. Resp. $1 + i$, -3.

b) $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = 0$; $2 - i$ Resp. $2 + i$, 1, 1.

c) $x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 32x^2 + 15x - 25 = 0$; $1 - 2i$, i. Resp. $-i$, $1 + 2i$, 5.

Ejercicio 1.22. Determine la ecuación mónica de grado mínimo con coeficientes reales que tenga las raíces indicadas.

a) -2, $3 + i$. Resp. $x^3 - 4x^2 - 2x + 20 = 0$.

b) 1, 3, $1 + 2i$.

c) $2 + 4i$, $2i$. Resp. $x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 16x + 80 = 0$.

d) -2, -1, 1, 2. Resp. $x^4 - 5x^2 + 4$.

Ejercicio 1.23. Demuestre que la ecuación $x^7 + 4x^6 + 2x^3 + 9x^2 + 6 = 0$ tiene por lo menos 4 raíces complejas.

Ejercicio 1.24. Demuestre que la ecuación $4x^4 - 3x^3 - x - 10 = 0$ tiene exactamente dos raíces complejas.

Ejercicio 1.25. En la ecuación $x^n + 1 = 0$, demuestre que,

a) si n es par, las n raíces son complejas.

b) si n es impar, hay exactamente una raíz negativa igual a -1 y $n-1$ raíces complejas.

Ejercicio 1.26. Demuestre que una ecuación cuyos términos son todos positivos no tiene raíces positivas.

Ejercicio 1.27. Demuestre que una ecuación completa que tiene sólo términos pares, todos con el mismo signo, no tiene raíces reales.

Ejercicio 1.28. Demuestre que la ecuación $2x^6 + 5x^4 - 4x^2 - 8 = 0$ tiene exactamente cuatro raíces complejas.

Ejercicio 1.29. Encuentre todas las raíces de las siguientes ecuaciones,

a) $3x^3 - 4x^2 - 35x + 12 = 0$. Resp. $4,\ -3,\ \frac{1}{3}$.

b) $2x^3 + \frac{29}{3}x^2 - \frac{40}{3}x + 4 = 0$. Resp. $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -6$.

c) $4x^5 - 4x^4 - 5x^3 + x^2 + x = 0$. Resp. $0,\ \pm\frac{1}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

d) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$. Resp. $-3,\ -2,\ 2$.

Ejercicio 1.30. En $\mathbb{Z}_5[x]$ determine los ceros de $p(x) = x^4 + 3x^3 + 2x + 4$.
Resp. $p(x) = (x-1)^3(x+1)$ es decir, 1 de multiplicidad 3 y $-1 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 5)$.

Ejercicio 1.31. Halle todas las raíces raciones de las siguientes ecuaciones.

a) $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 6x + 4 = 0$. Resp. -2.

b) $x^7 - 3x^6 + x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$. Resp. 3.

c) $x^4 + 4x^2 - x + 6 = 0$. Resp. Ninguna raíz racional.

Ejercicio 1.32. Las dimensiones de una caja rectangular son 3 cm, 5 cm, y 7 cm. Si cada una de estas dimensiones se aumenta en la misma cantidad, su volumen se triplica. Calcule esta cantidad. Resp. 2 cm.

Ejercicio 1.33. En cada una de las siguientes ecuaciones, halle la raíz indicada con una cifra decimal.

a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 5 = 0$, $2 < x < 3$. Resp. 2,6.

b) $x^3 + 3x^2 + 2x - 7 = 0$, $1 < x < 2$. Resp. 1,1.

c) $x^3 - 3x^2 - 26x + 69 = 0$, $2 < x < 3$. Resp. 2,5.

Ejercicio 1.34. Resuelva la ecuación $4x^3 - 12x^2 + 3x + 5 = 0$ sabiendo que las raíces están en progresión aritmética. Resp. $-\frac{1}{2}$, 1, $\frac{5}{2}$.

Ejercicio 1.35. Resuelva la ecuación $4x^3 - x^2 - 16x + 4 = 0$ si una raíz es el negativo de la otra. Resp. 2, -2, $\frac{1}{4}$.

Ejercicio 1.36. Resuelva la ecuación $x^3 + 2x^2 - 15x - 36 = 0$ sabiendo que tiene una raíz doble. Resp. -3, -3, 4.

Ejercicio 1.37. Resuelva la ecuación $3x^3 + 17x^2 - 87x + 27 = 0$ si una raíz es el recíproco de otra. Resp. 3, $\frac{1}{3}$, -9.

Ejercicio 1.38. Resuelva $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$ sabiendo que tiene una raíz triple. Resp. 2 (de multiplicidad 3) y -1.

Ejercicio 1.39. Resuelva la ecuación $2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = 0$ si las raíces están en la proporción $1 : 2 : 6$. Resp. $-\frac{1}{2}$, -1, -3.

Ejercicio 1.40. Determine la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Resp. $p^2 - 2q$.

Ejercicio 1.41. Si dos raíces de la ecuación $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ son iguales en valor absoluto pero de signos contrarios demuestre que $pq = r$.

Ejercicio 1.42. En cada uno de los siguientes ejercicios descomponga la fracción dada en sus fracciones parciales y compruebe el resultado.

a) $\dfrac{3x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x^2+1)} \in \mathbb{R}(x)$. Resp. $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{x-3}{x^2+1}$.

b) $\dfrac{2x^3 - 4x^2 + 4x - 4}{(x^2+1)(x^2+2)} \in \mathbb{R}(x)$. Resp. $\dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{4}{x^2+2}$.

c) $\dfrac{2x^4+4x^3+4x^2+x-6}{x^4+x^3+3x^2} \in \mathbb{R}(x)$. Resp. $2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{x-1}{x^2+x+3}$.

d) $\dfrac{2x+4}{x^3+4x} \in \mathbb{R}(x)$. Resp. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{-x+2}{x^2+4}$.

e) $\dfrac{2x+4}{x^3+4x} \in \mathbb{C}(x)$. Resp. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}{x+2i}+\dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{x-2i}$.