

NÚMEROS COMPLEJOS

1.1. INTRODUCCIÓN

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en el cuerpo de los números reales \mathbb{R} ya que no existe un número real x tal que $x^2 = -1$. Necesitamos un conjunto que contenga a \mathbb{R} , que solucione lo que soluciona \mathbb{R} y que, por ejemplo, solucione el problema planteado, tal conjunto es el conjunto de los números complejos \mathbb{C} .

Se define al conjunto \mathbb{C} como $\mathbb{C} = \{z = (a, b) / a, b \in \mathbb{R}\}$.

1.2. OPERACIONES CON COMPLEJOS

Definición 1.2.1. Sean $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d) \in \mathbb{C}$, entonces

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Definición 1.2.2. Sean $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d) \in \mathbb{C}$, entonces, la suma de complejos, denotada $+$, es tal que

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo 1.2.1. Si $z_1 = (-2, 6)$, $z_2 = (4, 3)$ entonces $z_1 + z_2 = (-2, 6) + (4, 3) = (2, 9)$.

Teorema 1.2.1. $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo conmutativo, es decir,

1. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. *Asociatividad de la Suma.*
2. Existe el complejo z_N tal que $z_N + z = z + z_N = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$. z_N *Neutro Aditivo.*
3. $\forall z \in \mathbb{C} \exists z_{op} \in \mathbb{C}$ tal que $z + z_{op} = z_{op} + z = z_N$. z_{op} *Opuesto de z .*
4. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Conmutatividad de la Suma.*

Demostración.

2. Sean $z = (a, b)$, $z_N = (x, y) \in \mathbb{C}$; imponiendo la condición de neutro tenemos $z + z_N = z$, es decir, $(a, b) + (x, y) = (a, b)$; debemos determinar x e y ,

$$(a, b) + (x, y) = (a, b) \Rightarrow (a + x, y + b) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a + x = a \\ y + b = b \end{cases}$$

como este sistema ocurre en \mathbb{R} entonces $x = 0$ e $y = 0$, de donde $z_N = (0, 0)$. Por otro lado, $z_N + z = (0, 0) + (a, b) = (a, b) = z$.

4. Sean $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d) \in \mathbb{C}$ entonces,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a, b) + (c, d) \\ &= (a + c, b + d) \\ &\stackrel{*}{=} (c + a, d + b) \\ &= (c, d) + (a, b) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

*: por la conmutatividad de la suma en \mathbb{R} .

Es inmediato determinar que

- a) $z_N = (0, 0)$ es único y lo dotamos por 0.
- b) Si $z = (a, b)$ entonces $z_{op} = (-a, -b)$ es único y lo denotamos por $-z$.

□

Definición 1.2.3. Sean $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$ entonces, la ponderación del complejo z por el escalar k , denotada kz , es tal que

$$kz = k(a, b) = (ka, kb) \in \mathbb{C}.$$

Observación 1.2.1.

1. $1z = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $1 \in \mathbb{R}$.
2. $(k_1 + k_2)z = k_1z + k_2z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
3. $(k_1k_2)z = k_1(k_2z)$, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
4. $k(z_1 + z_2) = kz_1 + kz_2$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 1.2.2. Sean $z_1 = (3, -2)$, $z_2 = (2, 4) \in \mathbb{C}$ entonces

$$3z_1 - 2z_2 = 3(3, -2) - 2(2, 4) = (5, -14).$$

Definición 1.2.4. Sean $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d) \in \mathbb{C}$, entonces el producto de complejos es tal que

$$z_1 z_2 = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}.$$

Teorema 1.2.2. *Se cumple:*

1. $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. *Asociatividad del producto.*
2. *Existe el complejo z_N tal que $z_N \cdot z = z \cdot z_N = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$. z_N : Neutro multiplicativo.*
3. $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \exists z_{inv} \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z_{inv} = z_{inv} \cdot z = z_N$. z_{inv} : Inverso multiplicativo.
4. $z_1 z_2 = z_2 z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Conmutatividad del producto.*

Demostración.

- 2) Sean $z = (a, b) \neq (0, 0)$, $z_N = (x, y) \in \mathbb{C}$, entonces, como debe cumplirse que $z_N \cdot z = z$ tenemos,

$$z_N \cdot z = z \Rightarrow (x, y)(a, b) = (a, b) \Rightarrow (xa - yb, xb + ya) = (a, b).$$

Por la igualdad de complejos deducimos el sistema

$$\begin{cases} xa - yb = a \\ xb + ya = b \end{cases}$$

multiplicando la primera ecuación por a y la segunda ecuación por b , sumando obtenemos $xa^2 + xb^2 = a^2 + b^2$ de donde $x = 1$; podemos deducir que $y = 0$, de donde $z_N = (1, 0)$.

Por otro lado, $z \cdot z_N = (a, b)(1, 0) = (a - 0, 0 + b) = (a, b) = z$. Si $z = (a, 0)$, $z = (0, b)$, $z = (0, 0)$ también se cumple $(1, 0) \cdot z = z \cdot (1, 0) = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

- 3) Sean $z = (a, b) \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z_{inv} = (x, y)$, entonces se debe cumplir que $z \cdot z_{inv} = (1, 0)$, es decir, se debe cumplir que $(a, b)(x, y) = (1, 0)$; tenemos,

$$\begin{aligned} (a, b)(x, y) = (1, 0) &\Rightarrow (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

multiplicando la primera ecuación por a , la segunda ecuación por b y sumando, obtenemos $a^2 x + b^2 x = a$ de donde $x = \frac{a}{a^2 + b^2}$; usted puede concluir que $y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$, de donde, el inverso multiplicativo de $z = (a, b)$ es $z_{inv} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$.

□

Observación 1.2.2.

- a) $z_N = (1, 0)$ es único y lo dotamos por 1.
- b) Si $z = (a, b) \neq (0, 0)$ entonces $z_{inv} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$ es único y lo denotamos por z^{-1} , así,

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Observación 1.2.3. Definimos el cociente $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$ por $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$.

1.3. SUBCONJUNTOS DE \mathbb{C}

Existen dos importantes subconjuntos de \mathbb{C} ,

- a) Complejos reales, denotado $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, tal que $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \{z = (a, b) / b = 0\} \subseteq \mathbb{C}$.
- b) Complejos imaginarios, denotado I , tal que $I = \{z = (a, b) / a = 0\} \subseteq \mathbb{C}$.

Observación 1.3.1.

1. Aceptaremos que existe un isomorfismo entre $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ y \mathbb{R} el cual nos permite identificar el complejo real $(a, 0)$ con el real a , así, $(a, 0) = a$.
2. En los complejos imaginarios, la unidad imaginaria es $i = (0, 1)$.

Potencias de i

Se cumple,

- a) $i = (0, 1)$.
- b) $i^2 = -1$ ya que $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.
- c) $i^3 = -i$.
- d) $i^4 = 1$.
- e)

$$i^n = \begin{cases} i & \text{si } n = 4p + 1 \\ -1 & \text{si } n = 4p + 2 \\ -i & \text{si } n = 4p + 3 \\ 1 & \text{si } n = 4p \end{cases}$$

con $n, p \in \mathbb{N}$.

Observación 1.3.2.

1. \mathbb{C} no es ordenado.

Haremos la demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que \mathbb{C} es ordenado, entonces existe $\mathbb{C}^+ \subseteq \mathbb{C}$ tal que,

$$\text{a) } z_1, z_2 \in \mathbb{C}^+ \Rightarrow \begin{cases} (z_1 + z_2) \in \mathbb{C}^+ \\ z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}^+ \end{cases}$$

b) $\forall z \in \mathbb{C}$ se cumple sólo una de las siguientes,

$$\text{i) } z \in \mathbb{C}^+ \quad \text{ii) } -z \in \mathbb{C}^+ \quad \text{iii) } z = 0.$$

Sea $i = (0, 1) \in \mathbb{C} - \{0\}$ y supongamos que $i \in \mathbb{C}^+$, entonces por a) $i^2 = -1 \in \mathbb{C}^+$, así, por a) $(-1)(-1) = 1 \in \mathbb{C}^+$, es decir, -1 y $1 \in \mathbb{C}^+$ ($\Rightarrow \Leftarrow$).

Por otro lado si suponemos que $-i \in \mathbb{C}^+$, entonces por a) $(-i)^2 = i^2 - 1 \in \mathbb{C}^+$, así, por a) $(-1)(-1) = 1 \in \mathbb{C}^+$, es decir, -1 y $1 \in \mathbb{C}^+$ ($\Rightarrow \Leftarrow$).

Luego, \mathbb{C} no puede ser un conjunto ordenado.

2. Si $p \in \mathbb{R}^-$ entonces $\sqrt{p} = i\sqrt{-p} \in \mathbb{C}$.

En efecto, sea $\sqrt{p} = (x, y)$ donde $p = (p, 0)$ entonces $(p, 0) = (x, y)(x, y)$ es decir $(p, 0) = (x^2 - y^2, 2xy)$, de aquí concluimos que

$$\begin{cases} p = x^2 - y^2 \\ 0 = 2xy \end{cases}$$

De la segunda ecuación concluimos que $x = 0 \vee y = 0$, notamos que $y \neq 0$, ya que si $y = 0$ entonces $\sqrt{p} = (x, 0) = x \in \mathbb{R}$ (esto es una contradicción), luego $x = 0$.

Como $x = 0$ entonces, reemplazando en la primera ecuación del sistema obtenemos $p = -y^2$ es decir, $y^2 = -p \in \mathbb{R}$, luego $y = \sqrt{-p} \in \mathbb{R}$; finalmente $\sqrt{p} = (0, \sqrt{-p}) = i\sqrt{-p}$.

1.4. COMPLEJOS EN FORMA CANÓNICA

Sea $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ entonces la forma canónica del complejo es $z = a + bi$. En efecto,

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

1.5. OPERATORIA CON COMPLEJOS CANÓNICOS

La suma, producto y ponderación por escalar se realiza como si ellos fuesen polinomios, considerando las potencias de i .

Por ejemplo,

$$(5 - 4i)(2 + 3i) = 10 + 15i - 8i - 12i^2 = 10 + 7i + 12 = 22 + 7i.$$

La división de complejos en forma canónica se efectúa, amplificando por el "conjugado" del complejo divisor, por ejemplo, $\frac{2+3i}{4+5i} = \frac{2+3i}{4+5i} \cdot \frac{4-5i}{4-5i}$; al efectuar las multiplicaciones obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{8 - 10i + 12i - 15i^2}{16 - 25i^2} &= \frac{8 - 10i + 12i - 15(-1)}{16 - 25(-1)} \\ &= \frac{23 + 2i}{41} \\ &= \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i \end{aligned}$$

1.6. CONJUGADO DE UN COMPLEJO

Definición 1.6.1. Sea $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, definimos el conjugado del complejo z , denotado \bar{z} como $\bar{z} = (a, -b) \in \mathbb{C}$.

Teorema 1.6.1. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple,

1. $\overline{(\bar{z})} = z$.
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$.
5. $z + \bar{z} = 2a, \quad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ si $z = (a, b)$.

Demostración.

1. Si $z = a + bi$ entonces $\bar{z} = a - bi$ de donde $\overline{(\bar{z})} = a + bi = z$.
2. Si $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ entonces $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ de donde

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

5. Si $z = (a, b)$ entonces $z + \bar{z} = (a, b) + (a, -b) = (2a, 0) = 2a$; por otro lado

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a, b)(a, -b) \\ &= (a^2 + b^2, 0) \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

□

Notación 1.6.1. Sea $z = a + bi$ un número complejo entonces la parte real de z , denotada $Re(z)$ es $a = Re(z)$ y la parte imaginaria de z , denotada $Im(z)$ es $b = Im(z)$.

Ejemplo 1.6.1. Determine $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $z^2 = \bar{z}$.

Solución. Sea $z = a + bi$ entonces, imponiendo la condición obtenemos $(a + bi)^2 = a - bi$,

$$\begin{aligned} (a + bi)^2 = a - bi &\Rightarrow a^2 + 2abi + b^2i^2 = a - bi \\ &\Rightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = a - bi \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a & (1) \\ 2ab = -b & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

De (2) y suponiendo que $b \neq 0$ obtenemos $a = -\frac{1}{2}$; reemplazando en (1) conseguimos $(-\frac{1}{2})^2 - b^2 = -\frac{1}{2}$, de aquí concluimos que $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces los complejos que se obtienen son

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Si $b = 0$ entonces reemplazando en (1) conseguimos $a^2 = a$, de donde $a = 0$, $a = 1$; como no puede ocurrir que $a = 0$ entonces el complejo que se determina, ahora es $z = 1$.

Ejemplo 1.6.2. Si $z = a + bi$, determine $\frac{iRe(z)}{Im(iz)}$.

Solución. Como $iz = i(a + bi) = ai + bi^2 = -b + ai$ entonces

$$\frac{iRe(z)}{Im(iz)} = \frac{ia}{a} = i.$$

1.7. NORMA O MÓDULO DE UN COMPLEJO

Definición 1.7.1. Sea $z = (a, b) = a + bi$ un número complejo entonces, la norma del complejo, denotada $|z|$ es tal que $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$.

Teorema 1.7.1. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple,

- 1) $|z| \geq 0$.
- 2) $|z| = |\bar{z}|$.
- 3) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ ó $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.
- 4) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- 5) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.
- 6) $|Re(z)| \leq |z|$, $|Im(z)| \leq |z|$.
- 7) $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$.
- 8) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- 9) $\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$.

Demostración. Demostración de la propiedad 8).

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 \\ &\stackrel{*}{=} |z_1|^2 + 2Re(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\stackrel{**}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1 \cdot z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Sacando raíz cuadrada conseguimos lo pedido.

$$* : \operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|.$$

$$** : \frac{z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2}{2} = \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$

□

1.8. FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Considere el número complejo $z = (a, b) = a + bi$, entonces definimos el argumento de z , denotado $\arg(z) = \theta$, como aquel ángulo θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, tal que $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$; además, si $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ concluimos que la forma trigonométrica de z es

$$z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)).$$

Ejemplo 1.8.1. *Escriba en forma trigonométrica los siguientes números complejos,*

a) $z_1 = 2 + 2i.$

b) $z_2 = -2 - 2i.$

c) $z_3 = -2 + 2i.$

d) $z_4 = 2 - 2i.$

e) $z_5 = 2i.$

f) $z_6 = -3.$

Solución.

- a) Como $a = 2$, $b = 2$ entonces $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; por otro lado, el complejo está en el primer cuadrante, de donde $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan(1) = 45^\circ$, así entonces

$$z_1 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos(45^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ)).$$

- b) Como $a = -2$, $b = -2$ entonces $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$; por otro lado, el complejo está en el tercer cuadrante, de donde $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan(1) = 225^\circ$, así entonces

$$z_2 = -2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos(225^\circ) + i \operatorname{sen}(225^\circ)).$$

c) $z_3 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos(135^\circ) + i \operatorname{sen}(135^\circ)).$

d) $z_4 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos(315^\circ) + i \operatorname{sen}(315^\circ)).$

- e) $z_5 = 2i = 2(\cos(90^\circ) + i \operatorname{sen}(90^\circ))$ ya que el complejo está en el eje Y y el argumento es, inmediatamente, $\theta = 90^\circ$.

f) $z_6 = -3 = 3(\cos(180^\circ) + i \operatorname{sen}(180^\circ)).$

1.9. OPERATORIA CON COMPLEJOS TRIGONOMÉTRICOS

Teorema 1.9.1. Sean $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1))$, $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2))$ dos complejos, entonces,

a)

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1)) \cdot r_2(\cos(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2)) \\ &= r_1 \cdot r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

b)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1))}{r_2(\cos(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2))} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)); z_2 \neq 0.$$

c)

$$z^n = [r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))]^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)); n \in \mathbb{N}.$$

Observación 1.9.1.

1. El teorema en su parte a) y b) se demuestra con ayuda de las identidades trigonométricas: $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)$.
2. La parte c) del teorema se demuestra usando inducción y se llama Teorema de De Moivre.
3. Si $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \neq 0$ entonces:

a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{\cos(0^\circ) + i \operatorname{sen}(0^\circ)}{r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))} \\ &= \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)) \\ &= \frac{1}{r}(\cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta)).\end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n}(\cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta)).$$

Ejemplo 1.9.1. Calcule $(-1 + i)^{42}$.

Solución. Como $z = -1 + i = \sqrt{2}(\cos(135^\circ) + i \operatorname{sen}(135^\circ))$ entonces,

$$\begin{aligned}(-1 + i)^{42} &= \left[\sqrt{2}(\cos(135^\circ) + i \operatorname{sen}(135^\circ)) \right]^{42} \\ &= \left(\sqrt{2} \right)^{42} (\cos(42 \cdot 135^\circ) + i \operatorname{sen}(42 \cdot 135^\circ)) \\ &= 2^{21} (\cos(5670^\circ) + i \operatorname{sen}(5670^\circ)) \\ &= 2^{21} (\cos(15 \cdot 360 + 270)^\circ + i \operatorname{sen}(15 \cdot 360 + 270)^\circ) \\ &= 2^{21} (\cos(270^\circ) + i \operatorname{sen}(270^\circ)) \\ &= -2^{21}i.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.9.2. Escriba en forma $a + bi$ la expresión $\left(\frac{10\sqrt{3} + 10i}{5 + 5i} \right)^{-6}$.

Solución. Escribimos cada complejo en su forma trigonométrica, los dividimos, aplicamos el Teorema de DeMoivre y listo.

$$\begin{aligned}\left(\frac{10\sqrt{3} + 10i}{5 + 5i} \right)^{-6} &= \left(\frac{5 + 5i}{10\sqrt{3} + 10i} \right)^6 \\ &= \left(\frac{5\sqrt{2}(\cos(45^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ))}{20(\cos(30^\circ) + i \operatorname{sen}(30^\circ))} \right)^6 \\ &= \left[\frac{5\sqrt{2}}{20}(\cos(45^\circ - 30^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ)) \right]^6 \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{4}(\cos(15^\circ) + i \operatorname{sen}(15^\circ)) \right]^6 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^6 (\cos(90^\circ) + i \operatorname{sen}(90^\circ)) \\ &= \frac{1}{512}(0 + i) \\ &= \frac{1}{512}i.\end{aligned}$$

Definición 1.9.1. Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Decimos que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima de z si y sólo si $w^n = z$.

Observación 1.9.2. Si denotamos $w = \sqrt[n]{z}$ entonces $w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z$.

Ejemplo 1.9.3. Verifique que $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $w_3 = 1$ son raíces cúbicas de 1.

Solución. Debemos demostrar que $w_i^3 = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Como $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i = \cos(120^\circ) + i \operatorname{sen}(120^\circ)$ entonces, usando el teorema de De Moivre obtenemos

$$w_1^3 = [\cos(120^\circ) + i \operatorname{sen}(120^\circ)]^3 = \cos(360^\circ) + i \operatorname{sen}(360^\circ) = 1.$$

De manera análoga,

$$w_2^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^3 = (\cos(240^\circ) + i \operatorname{sen}(240^\circ))^3 = \cos(720^\circ) + i \operatorname{sen}(720^\circ) = 1.$$

1.10. RAÍCES DEL COMPLEJO $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \neq 0$

Las n raíces n -ésimas del complejo $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \neq 0$ son

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\theta+k \cdot 360^\circ}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+k \cdot 360^\circ}{n}\right) \right),$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Observación 1.10.1. Note que

$$\begin{aligned} w_k^n &= \left[\sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\theta+k \cdot 360^\circ}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+k \cdot 360^\circ}{n}\right) \right) \right]^n \\ &= \left(\sqrt[n]{r} \right)^n \left(\cos\left(\frac{\theta+k \cdot 360^\circ}{n} \cdot n\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+k \cdot 360^\circ}{n} \cdot n\right) \right) \\ &= r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \\ &= z. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.10.1. Calcule las tres raíces cúbicas de -8 .

Solución. Como $z = -8 = 8(\cos(180^\circ) + i \operatorname{sen}(180^\circ))$ entonces,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-8} &= \sqrt[3]{8(\cos(180^\circ) + i \operatorname{sen}(180^\circ))} \\ &= w_k \\ &= \sqrt[3]{8} \left(\cos\left(\frac{180^\circ+k \cdot 360^\circ}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ+k \cdot 360^\circ}{3}\right) \right), \end{aligned}$$

con $k = 0, 1, 2$.

Si $k = 0$ entonces $w_0 = 2(\cos(60^\circ) + i \operatorname{sen}(60^\circ)) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

Si $k = 1$ entonces $w_1 = 2(\cos(180^\circ) + i \operatorname{sen}(180^\circ)) = 2(-1 + 0i) = -2$.

Si $k = 2$ entonces $w_2 = 2(\cos(300^\circ) + i \operatorname{sen}(300^\circ)) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) = 1 - i\sqrt{3}$, así,

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} -2 \\ 1 + i\sqrt{3} \\ 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

Ejemplo 1.10.2. Determine $m, n \in \mathbb{R}$ tal que $z = 1 + i$ sea raíz de la ecuación $z^5 + mz^3 + n = 0$.

Solución. Si $z = 1 + i$ entonces $z = \sqrt{2}(\cos(45^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ))$ de donde

$$\begin{aligned} z^5 &= \left[\sqrt{2}(\cos(45^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ)) \right]^5 \\ &= (\sqrt{2})^5 (\cos(225^\circ) + i \operatorname{sen}(225^\circ)) \\ &= (\sqrt{2})^5 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= -4 - 4i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= \left[\sqrt{2}(\cos(45^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ)) \right]^3 \\ &= (\sqrt{2})^3 (\cos(125^\circ) + i \operatorname{sen}(125^\circ)) \\ &= (\sqrt{2})^3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= -2 + 2i. \end{aligned}$$

De $z^5 + mz^3 + n = 0$ obtenemos $(-4 - 4i) + m(-2 + 2i) + n = 0 + 0i$ es decir, obtenemos

$$\begin{cases} -4 - 2m + n = 0 \\ -4 + 2m = 0 \end{cases}$$

Como $m = 2$, si reemplazamos este valor en la ecuación $-4 - 2m + n = 0$ conseguimos $n = 8$.

Ejemplo 1.10.3. Calcule el valor de $(1 + w)^3 + (1 + w^2)^9$ si, w es raíz cúbica de 1 y distinta de la unidad.

Solución.

Ya hemos visto en un ejemplo anterior, las tres raíces cúbicas del 1; las dos raíces distintas del 1 son $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$; $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, sin embargo, no conviene reemplazar cada una de estas raíces en la igualdad planteada, nos conviene realizar el calculo de la siguiente manera.

Como w es raíz cúbica de 1 entonces $w^3 = 1$, de aquí obtenemos $w^3 - 1 = 0$, factorizando tenemos $(w - 1)(w^2 + w + 1) = 0$.

Como $w \neq 1$ entonces $w^2 + w + 1 = 0$ así, $1 + w = -w^2$ y $1 + w^2 = -w$ entonces

$$\begin{aligned} (1+w)^3 + (1+w^2)^2 &= (-w^2)^3 + (-w)^9 \\ &= -w^6 - w^9 \\ &= -(w^3)^2 - (w^3)^3 \\ &= -1 - 1 \\ &= -2. \end{aligned}$$

1.11. FORMA EXPONENCIAL

La ecuación $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$ que define a $e^{i\theta}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, se conoce como la fórmula de Euler; así,

$$z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) = re^{i\theta}.$$

Observación 1.11.1. Se puede demostrar que

a) $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

b) $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Ejemplo 1.11.1. Calcule $(1 - i)^{23}$.

Solución.

$$\begin{aligned} (1 - i)^{23} &= \left(\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}\right)^{23} \\ &= 2^{\frac{23}{2}}e^{\frac{161\pi}{4}i}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.11.2. Demuestre que:

a) $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.

b) $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Solución.

a) $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta) + \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)}{2} = \cos(\theta)$.

b) Se demuestra de manera análoga.

Ejemplo 1.11.3. Demuestre que $\operatorname{sen}^3(\theta) = \frac{3}{4} \operatorname{sen}(\theta) - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(3\theta)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 \\
 &= \frac{(e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} (e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3}{8i^3} \\
 &= -\frac{1}{8i} (e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) \\
 &= -\frac{3}{-8i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) - \frac{1}{8i} (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) \\
 &= \frac{3}{4} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} - \frac{1}{4} \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} \\
 &= \frac{3}{4} \operatorname{sen}(\theta) - \frac{1}{4} \operatorname{sen}(3\theta)
 \end{aligned}$$

1.12. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1.1. Determine los números reales x e y tal que $3(x+2) + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$.
 Resp. $x = -\frac{23}{11}$, $y = \frac{16}{11}$.

Ejercicio 1.2. En los siguientes ejercicios reduzca a la forma $a + bi$.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & (3 + 5i) + (5 + 2i) - (4 + 7i)^2 & (c) \quad & \frac{-5 - 2i}{4 + i} + \frac{2 + 5i}{3i} & (e) \quad & \frac{(-5 + i)(1 + i)}{3 - i} + i \\
 (b) \quad & (2 + 3i)(5 - 3i)(-4 + 5i^5) & (d) \quad & \frac{3}{4(5 - i)(4 + 6i)} & (f) \quad & \left[\frac{2i^{37}}{(2 + i)(3 + 4i)} \right]^2
 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3. Si $z = a + bi$, determine,

i) $\frac{\operatorname{Re}(z)}{i\operatorname{Im}(iz)}$. Resp. $-i$.

ii) $[1 - \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)] \cdot [1 - \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)]$. Resp. $1 + a^2 + b^2 - 2a$.

Ejercicio 1.4. Si $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - i$, calcule,

$$(a) \quad 2z_1 + 3z_2 + 3 \quad (b) \quad \frac{z_1}{iz_2} \quad (c) \quad z_1^2 + 2z_3^2 \quad (d) \quad \frac{z_1 + z_3}{1 + z_2}$$

Ejercicio 1.5. Represente en el plano,

a) $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) = 2\}$. Resp. Recta de ecuación $x = 2$.

b) $\{z \in \mathbb{C} / 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 3\}$.

- c) $\{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$. Resp. Círculo con centro en $(0, 0)$ y radio menor o igual a 1.
 d) $\{z \in \mathbb{C} / |z - i| \leq 4\}$.
 e) $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}((z - 1)^2) = \operatorname{Re}(2z(z - 1))\}$. Resp. Hipérbola $1 = x^2 - y^2$.
 f) $\left\{z \in \mathbb{C} / \overline{(z + 1)}(z + 1) + 2\operatorname{Re}(z + 1) \leq 0\right\}$.

Ejercicio 1.6. Determine $\operatorname{Re}(p)$ e $\operatorname{Im}(p)$ si p es

- a) z^3 ,
 b) $\frac{2i}{z}$,
 c) $\frac{3}{z^2}$,

donde $z = a + bi$ donde $ab \neq 0$.

Resp. a) $\operatorname{Re}(p) = a^3 - 3ab^2$, $\operatorname{Im}(p) = 3a^2b - b^3$; b) $\operatorname{Re}(p) = \frac{2b}{a^2 + b^2}$, $\operatorname{Im}(p) = \frac{2a}{a^2 + b^2}$.

Ejercicio 1.7. Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que

- a) $|z| - z = 1 + 2i$. Resp. $\frac{3}{2} - 2i$.
 b) $|z| + z = 2 + i$. Resp. $\frac{3}{4} + i$.
 c) $z \cdot \bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$. Resp. $\pm \frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i$.
 d) $z \cdot \bar{z} + 2z = 3 + i$.

Ejercicio 1.8. Evalúe las siguientes expresiones

- a) $|(2 - 3i)(5 + 4i)(1 + i)|$. Resp. $\sqrt{1066}$.
 b) $\left| \frac{(2 + i)(-3 + 4i)(5 - 3i)}{(3 - 4i)(5 + 3i)} \right|$. Resp. $\sqrt{5}$.
 c) $\left| \frac{(3 + 5i)(5 - 2i)}{5 + 2i} \right| \cdot \left| \frac{-2}{3i} \right|$. Resp. $\frac{2}{3}\sqrt{34}$.

Ejercicio 1.9. Demuestre que $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{z^2} = \bar{z}^2$.

Ejercicio 1.10. Encuentre los números complejos z que satisfacen las dos relaciones siguientes,

$$\left| \frac{z - 12}{z - 8i} \right| = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad \left| \frac{z - 4}{z - 8} \right| = 1.$$

Resp. $z = 6 + 17i$, $z = 6 + 8i$.

Ejercicio 1.11. La suma de dos números complejos es $3 + 2i$. La parte real de uno de ellos es 2. El cociente entre ellos es imaginario puro. Hallar ambos números.

Resp. $z_1 = 2 + (1 + \sqrt{3})i$, $z_2 = 1 + (1 - \sqrt{3})i$; $z_1 = 2 + (1 - \sqrt{3})i$, $z_2 = 1 + (1 + \sqrt{3})i$.

Ejercicio 1.12. Analice si se cumplen las siguientes igualdades,

$$a) \frac{(2+i)^2}{3-4i} = 1 \quad b) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ejercicio 1.13. Verifique si el número complejo $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ satisface la ecuación

$$\frac{3}{z+1} - \frac{1}{z} = 1.$$

Ejercicio 1.14. Demuestre que,

a) $(z - \bar{z})^2 \leq 0, \forall z \in \mathbb{C}.$

b) Si $z^2 = \bar{z}^2$ entonces $z \in \mathbb{R} \vee \operatorname{Re}(z) = 0.$

Ejercicio 1.15. Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = \frac{1}{|z|} = |1 - z|.$

Resp. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Ejercicio 1.16. Resuelva

$$\begin{cases} (1+i)z - iu = 2+i \\ (2+i)z + (2-i)u = 2i \end{cases}$$

donde $z, u \in \mathbb{C}$. Resp. $z = \frac{6-9i}{13}$, $u = \frac{-16+11i}{13}$

Ejercicio 1.17. Si $(w + \frac{1}{w}) \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$, demuestre que $\operatorname{Im}(w) = 0 \vee |w| = 1.$

Ejercicio 1.18. Si $z, w \in \mathbb{C}$ y $|z| = 1$, demuestre que $\left| \frac{z+w}{\bar{z}w+1} \right| = 1.$

Ejercicio 1.19. Calcule

a) $\left| \frac{z}{w} \right|$ si $\frac{z+w}{z-w} = 1 + 4i$ tal que $z, w \in \mathbb{C}$. Resp. $\frac{\sqrt{5}}{2}.$

b) $\left| \frac{1}{z} + \frac{1}{u} \right|$ si $z = 3 - 4i$, $u = 4 + 3i.$

c) $\left| \frac{1}{z-z^2} \right|$ si $z = 2i$. Resp. $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

Ejercicio 1.20. Calcule

$$a) \left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{12} \quad b) \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{10}$$

Ejercicio 1.21. Usando De Moivre y Teorema del Binomio demuestre que

a) $\operatorname{sen}(3\theta) = 3 \operatorname{sen}(\theta) - 4 \operatorname{sen}^3(\theta)$.

b) $\operatorname{cos}(3\theta) = 4 \operatorname{sen}^3(\theta) - 3 \operatorname{cos}(\theta)$.

Ejercicio 1.22. Expresar en forma $a + bi$

a) $z = \sqrt{-7 + 24i}$.

b) $z = \left(\frac{10\sqrt{3} + 10i}{5 + 5i} \right)^{-6}$.

c) $z = \sqrt{6 + i\sqrt{3}}$. Resp. $z = \pm \sqrt{\frac{13}{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

d) $z = \sqrt{-11 - 60i}$. Resp. $z = 5 - 6i, z = -5 + 6i$.

e) $S = 1 + \frac{1}{1+i} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{27}}$.

Ejercicio 1.23. Si $w \neq 1$ es una raíz cúbica de 1 verifique si

a) $(1 + w^2)^4 = w$.

b) $(1 - w + w^2)(1 + w - w^2) = 4$.

c) $(2 + 2w + 5w^2)^6 = 729$.

Ejercicio 1.24. Demuestre que

a) $(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right), n \in \mathbb{N}$.

b) $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right), n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.25. Verifique que

$$(1 + i) \left(1 + i\sqrt{3} \right) (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \theta\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12} + \theta\right) \right].$$

Ejercicio 1.26. Calcule, usando forma trigonométrica

a) $(\sqrt{3} + i)(1 + i)$.

b) $(1 + i\sqrt{3})(1 - i)$.

c) $\frac{1-i}{1+i}$.

d) $\frac{3-3\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$.

e) $(1 - i)^{10}$.

f) $(2\sqrt{3} + 2i)^6$.

g) $(1 - i)^{16} + (1 + i)$.

h) $\frac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i}$.

i) $(1 + i)^{42}$.

Ejercicio 1.27. Resuelva,

a) $\sqrt[3]{-i}$ b) $\sqrt[3]{4\sqrt{3}-4i}$ c) $\sqrt[4]{1}$.

Ejercicio 1.28. Encuentre las 5 raíces quintas de la unidad.

Ejercicio 1.29. Resuelva la ecuación $z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 1.30. Si $x_n + iy_n = (1 + i\sqrt{3})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, demuestre que $x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1} = 2^{2n-2}\sqrt{3}$.

Ejercicio 1.31. Demuestre que

$$(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n = 2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

Ejercicio 1.32. Sea $z \neq 1$ una raíz n -ésima de la unidad. Demuestre que para todo natural distinto del uno se cumple

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0.$$

Ejercicio 1.33. Resuelva la ecuación

a) $x^4 + 8 + 8i\sqrt{3} = 0$ b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$.

Ejercicio 1.34. Sea $x_n + iy_n = (1 + i\sqrt{3})^{3n}$. Demuestre que $x_n + 2^3x_{n-1} = 0$.

Ejercicio 1.35. Si $z = (n-1)! + n!i$ y $w = 1 + ni$, pruebe que $|zw| = (n-1)!(1+n^2)$.