LOS NÚMEROS NATURALES

1.1. INDUCCION MATEMÁTICA

Existen diversas formas de sistematizar al conjunto de los números naturales y sus propiedades, la axiomática de Peano es aquella en que nos basaremos para deducir la Inducción Matemática y declarar algunas propiedades importantes de los naturales.

En 1.889, Giuseppe Peano (1858-1932) presentó la siguiente axiomática para los números naturales $\mathbb{N}$

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists!\, n^+ \in \mathbb{N}$ tal que $n^+ = n + 1$.
3. $\forall\, n \in \mathbb{N} : n^+ \neq 1$.
4. $\forall\, n, m \in \mathbb{N} : n \neq m \Rightarrow n^+ \neq m^+$.
5. $\left[S \subseteq \mathbb{N} \text{ tal que } \begin{cases} a)\ 1 \in S \\ b)\ n \in S \Rightarrow n^+ \in S \end{cases} \right] \Rightarrow S = \mathbb{N}$.

Observación 1.1.1.

El axioma 2 nos indica que todo natural n tiene un único sucesor $n^+ = n + 1$.

El axioma 3 nos indica que el natural 1 es sucesor de ningún natural, es decir, el 1 es el primer natural.

El axioma 4 nos indica que dos naturales distintos no tienen el mismo sucesor.

El axioma 5, Axioma de la Inducción, nos permitirá demostrar la validez de proposiciones en todo el conjunto de los naturales.

La axiomática de Peano nos permite, además, definir en el conjunto $\mathbb{N}$ la operación adición, la operación multiplicación y una relación de orden.

1.1.1. Primer Teorema de la Inducción

Teorema 1.1.1. Primer Teorema de la Inducción Matemática. *Consideremos la proposición $P(n)$, que contiene la variable $n \in \mathbb{N}$. Si la proposición $P(n)$ es tal que*

a) Se cumple que $P(1)$ es verdadera.

b) Asumiendo que $P(k)$ es verdadera, se verifica que $P(k+1)$ es verdadera,

entonces, $P(n)$ se cumple para todo natural.

Demostración. Consideremos el conjunto S formado por todos aquellos naturales que satisfacen la proposición, es decir, sea $S = \{n \in \mathbb{N} \,/\, P(n) \text{ es verdedera }\}$, debemos demostrar que $P(n)$ se satisface para todo natural, es decir, debemos demostrar que $S = \mathbb{N}$.

Como $P(1)$ es verdadero entonces $1 \in S$, además, por hipótesis se cumple que $P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$; esto indica que $k \in S \Rightarrow (k+1) \in S$.

Dado que el conjunto S satisface el quinto axioma de Peano concluimos que $S = N$ y entonces la proposición se cumple en $\mathbb{N}$. □

Observación 1.1.2.

1) Podemos anotar, en forma más breve, como sigue

$$\left\{ \begin{array}{ll} a) & P(1)V \\ b) & P(k)V \Rightarrow P(k+1)V \end{array} \right\} \Rightarrow P(n) \text{ es } V,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

2) También se conoce a esta proposición como “Primer principio de la Inducción Matemática”.

3) En el Primer Principio de la Inducción podría ocurrir que en la parte a) no se verifique $P(1)$ si no que para $P(n_0)$, $n_0 > 1$ entonces, si se cumple b) para todo $n \geq n_0$ concluimos que la proposición se cumple para todo $n \geq n_0$.

Ejemplo 1.1.1. *Demuestre que*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

se cumple para todo natural.

Solución. Sea

$$P(n) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Debemos demostrar que a) $P(1)$ es verdadera, y que b) $P(k)\,V \Rightarrow P(k+1)\,V$.

Antes de realizar la demostración debemos notar que en ella está involucrada la sucesión $\left(\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y que el hecho de que $P(k)$ sea verdadera significa que la suma de los k primeros términos de la sucesión es $\frac{k}{k+1}$.

a) $P(1)$ es verdadero ya que $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}$.

$P(2)$ es verdadero si se cumple $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{2+1}$.

Como el lado izquierdo de la última expresión tiene valor $\frac{2}{3}$ tanto como el lado derecho, concluimos que $P(2)$ es verdadero.

b) Si $P(k)$ es verdadero, es decir, si

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{k}{k+1},$$

debemos demostrar que $P(k+1)$ es verdadero, es decir, debemos demostrar que

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Veamos esto último,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k+1}{k+2}.
\end{aligned}$$

Así entonces la proposición se cumple en el conjunto de los Naturales.

Observación 1.1.3.

1. Ahora estamos seguros de poder sumar los n primeros términos de la sucesión dada, sin sumarlos, bastando con aplicar la fórmula de suma declarada.
2. La deducción de la fórmula, cuestión que la vemos interesante, la estudiaremos en una sección posterior.

Ejemplo 1.1.2. *Demuestre que toda expresión del tipo* $3^{2n} - 1$ *es divisible por 8, para todo valor de* n *en los naturales.*

Solución.

Sea $P(n) : 3^{2n} - 1 = 8r$, para algún $r \in \mathbb{N}$. Debemos demostrar: a) $P(1)$ es V y b) $P(k)\, V \Rightarrow P(k+1)\, V$.

a) $P(1)\ V$ ya que $P(1) : 3^{2\cdot 1} - 1 = 8 = 8\cdot 1$, $1 \in \mathbb{N}$.

$P(2)$ será verdadera si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $3^{2\cdot 2} - 1 = 8r$. Como $3^{2\cdot 2} - 1 = 80$ y $80 = 8\cdot 10$ entonces, con $r = 10 \in \mathbb{N}$ se satisface la condición.

b) Si $P(k)$ es V entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $3^{2k} - 1 = 8r$, debemos demostrar que $P(k+1)$ es V, es decir, debemos demostrar que existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $3^{2(k+1)} - 1 = 8s$. Veámoslo,

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)} - 1 &= 3^{2k}3^2 - 1 \\ &= 3^{2k}3^2 - 3^2 + 3^2 - 1 \\ &= 3^2(3^{2k} - 1) + 3^2 - 1 \\ &= 3^2(8r) + 8 \\ &= 8(9r + 1) \\ &= 8s \end{aligned}$$

con $s = (9r + 1) \in \mathbb{N}$.

Por a) y b) los números de la forma $3^{2n} - 1$ son divisibles por 8 para todo natural n.

Notemos el uso de la hipótesis inductiva al reemplazar (en el quinto paso) $3^{2k} - 1$ por $8r$. Como, por hipótesis inductiva se cumple $3^{2k} - 1 = 8r$, podemos despejar 3^{2k} obteniendo $3^{2k} = 8r + 1$. Si reemplazamos esto último en el paso 2 conseguimos

$$\begin{aligned} (8r + 1)3^2 - 1 &= 72r + 8 \\ &= 8(9r + 1) \\ &= 8s. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.3. *Demuestre que* $5^{2n} + (-1)^{n+1}$ *es divisible por 13 para todo valor de* $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Sea $P(n) : 5^{2n} + (-1)^{n+1} = 13p$ para algún valor de p en $\mathbb{N}$. Debemos demostrar que: a) $P(1)$ se cumple, b) Si $P(k)$ se cumple entonces $P(k + 1)$ también se cumple.

a) Como $5^{2\cdot 1} + (-1)^{1+1} = 25 + 1 = 26 = 13 \cdot 2$ entonces se verifica $P(1)$.

b) Si $P(k)$ se cumple entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $5^{2k} + (-1)^{k+1} = 13p$, debemos demostrar que $P(k + 1)$ también se cumple, es decir, debemos probar que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $5^{2k+2} + (-1)^{k+2} = 13q$.

$$\begin{aligned} 5^{2k+2} + (-1)^{k+2} &= 25 \cdot 5^{2k} + (-1)(-1)^{k+1} \\ &= 25 \cdot 5^{2k} + 25(-1)^{k+1} - 25(-1)^{k+1} + (-1)(-1)^{k+1} \\ &= 25\left[5^{2k} + (-1)^{k+1}\right] + (-1)^{k+1}(-25 - 1) \\ &= 25 \cdot 13p - 26(-1)^{k+1} \\ &= 13\left(25p - (-1)^{k+1}\right) \\ &= 13q, \end{aligned}$$

donde $q = 25p - (-1)^{k+1} \in \mathbb{N}$.

1.1.2. Segundo Teorema de la Inducción

Usaremos el siguiente Principio del Buen Orden para demostrar el Segundo Principio de la Inducción Matemática.

Principio del Buen Orden

Sea $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{N}$ entonces existe $p \in A$ tal que $p \leq n$, $\forall\, n \in A$.

Teorema 1.1.2. Segundo Teorema de Inducción Matemática. *Sea $P(n)$ una proposición que contiene una variable $n \in \mathbb{N}$, tal que*

a) $P(1)$ es verdadera,

b) para todo $k \in \mathbb{N} : P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)$ verdadera $\Rightarrow P(k+1)$ verdadera,

entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que $S = \{n \in \mathbb{N} \,/\, P(n) \text{ es } V\}$ es subconjunto propio de $\mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N} - S \neq \emptyset$ y $\mathbb{N} - S \subseteq \mathbb{N}$.

Por el Principio del Buen Orden existe $m \in \mathbb{N} - S$ tal que $m \leq r$, $\forall\, r \in \mathbb{N} - S$, luego $1, 2, \ldots, m-1 \in S$, es decir, $P(1), P(2), \ldots, P(m-1)$ es verdadero, luego, por hipótesis se cumple que $m \in S$; esto último es una contradicción, de donde $S = \mathbb{N}$. □

Ejemplo 1.1.4. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida en $\mathbb{R}$ tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y además $a_n = a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$, $\forall\, n \geq 3$. Demuestre que $a_n = 3 \cdot 2^{n-3}$, $\forall\, n \geq 3$.*

Solución. Sea $P(n) : a_n = 3 \cdot 2^{n-3}$, debemos demostrar que a) $P(3)$ es V y b) $P(3), P(4), \ldots, P(k)$ es V entonces $P(k+1)$ es V.

a) $P(3)$ es V ya que $a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3$ (usando la definición) y, usando la fórmula: $a_3 = 3 \cdot 2^{3-3} = 3$.

b) Si $a_n = 3 \cdot 2^{n-3}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $3 < n \leq k$ debemos demostrar que $a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-2}$. Veamos esto último

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \cdots + a_2 + a_1 \text{ (usando la definición)} \\ &= 3 \cdot 2^{n-3} + 3 \cdot 2^{n-4} + \cdots + 3 \cdot 2^{3-3} + 2 + 1 \text{ (usando la hipótesis inductiva)} \\ &= 3(2^{n-3} + 2^{n-4} + \cdots + 2^1 + 2^0) + 3 \qquad (*) \end{aligned}$$

Ahora debemos calcular $2^{n-3} + 2^{n-4} + \cdots + 2^1 + 2^0$.

Sea $S = 2^{n-3} + 2^{n-4} + \cdots + 2^1 + 2^0$; si multiplicamos por 2 obtenemos $2S = 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^2 + 2^1$ y restando obtenemos $S = 2^{n-2} - 1$.

Si reemplazamos en $(*)$ obtenemos $a_{n+1} = 3(2^{n-2} - 1) + 3 = 3 \cdot 2^{n-2}$.

Note el uso del Segundo Principio de la Inducción y de validez de la proposición a partir del natural 3.

1.1.3. Suma y Multiplicación en $\mathbb{N}$

Adición en los Naturales

Se define la adición en $\mathbb{N}$ por

$$\begin{cases} a)\ n+1 = n^+ \\ b)\ n+m^+ = (n+m)^+ \end{cases}$$

Ejemplo 1.1.5. *Demuestre que* $n+1 = 1+n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Solución.
La demostración se debe realizar por inducción sobre n y usaremos tanto n^+ como su igual $n+1$.
Sea $P(n) : n+1 = 1+n$, por demostrar a) $P(1)$ es V, y b) $P(k)\ V \Rightarrow P(k^+)V$.

a) $P(1)$ es V ya que $1+1 = 1+1$.

b) Si $P(k)$ es V, es decir, si $k+1 = 1+k$ debemos demostrar que $P(k^+)$ es V, es decir, debemos demostrar que $k^+ + 1 = 1 + k^+$.

   Tenemos: $k^+ + 1 = (k+1)+1 = (1+k)+1 = 1+k^+$.

Proposición 1.1.1. *Para todo* $n, m, p \in \mathbb{N}$ *se cumple*

a) $n+m \in \mathbb{N}$.

b) $m+(n+p) = (m+n)+p$.

c) $m+n = n+m$.

d) Si $m+p = n+p$ *entonces* $m = n$.

Demostración. Demostraremos sólo la propiedad c), el resto de la proposición queda como ejercicio. En la demostración, además de la definición de adición usamos, en particular, la asociatividad.
Sea m un natural arbitrario, pero fijo y $P(n) : n+m = m+n$. Debemos demostrar que a) $P(1)$ es V, b) $P(k)\,V \Rightarrow P(k^+)\,V$.

a) $P(1)$ es V ya que $1+m = m+1$ (ya se demostró).

b) Si $P(k)$ es V, es decir, si $k+m = m+k$, debemos demostrar que $P(k^+)$ es V, es decir, debemos demostrar que $k^+ + m = m + k^+$.

   Veámoslo,

$$k^+ + m = (k+1)+m = k+(1+m) = (k+m)+1 = (m+k)+1 = m+k^+.$$

□

Multiplicación en los Naturales

Se define la multiplicación en $\mathbb{N}$ por

$$\begin{cases} a)\; n \cdot 1 = n \\ b)\; n \cdot m^+ = n \cdot m + n \end{cases}$$

Proposición 1.1.2. *Para todo $n, m, p \in \mathbb{N}$ se cumple*

a) $n \cdot m \in \mathbb{N}$.

b) $m \cdot n = n \cdot m$.

c) $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$.

d) Si $m \cdot p = n \cdot p$ *entonces* $m = n$.

Además, se cumple

e) $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$.

Demostración. Demostraremos sólo la parte e) de la proposición, asumiendo ya demostradas las otras propiedades.

Supongamos que m, n son números naturales arbitrarios pero fijos y realicemos inducción sobre p. Sea $P(p) : (m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$.

Debemos demostrar que a) $P(1)$ es V y que b) $P(k)\, V \Rightarrow P(k^+)\, V$.

a) $P(1)$ es V ya que $(m + n) \cdot 1 = m \cdot 1 + n \cdot 1 = m + n$.

b) Si $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$ debemos demostrar que $(m + n) \cdot k^+ = m \cdot k^+ + n \cdot k^+$,

$$\begin{aligned} (m + n) \cdot k^+ &= (m + n) \cdot k + (m + n) \\ &= m \cdot k + n \cdot k + m + n \\ &= m \cdot k + (n \cdot k + n) + m \\ &= (m \cdot k + m) + (n \cdot k + n) \\ &= m \cdot k^+ + n \cdot k^+. \end{aligned}$$

$\square$

1.1.4. Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1.1. Si n es un número natural, demuestre la validez en $\mathbb{N}$

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

d) $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$.

e) $2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2(2^n-1)$.

f) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2\left(2n^2-1\right)$.

g) $(1+2+3+\cdots+n)^2=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

h) $\left(6^{n+1}+4\right)$ es divisible por 5.

i) 5^n-2^n es divisible por 3.

j) x^n-y^n es divisible por $x-y$.

k) n^3+2n es divisible por 3.

Ejercicio 1.2. Probar que cada una de las siguientes proposiciones se cumple en $\mathbb{N}$.

a) $n<2^n$.

b) $3^n\geq 2n+1$.

c) $2n\leq 2^n$.

d) $x^{2n}-y^{2n}$ es divisible por $(x+y)\neq 0$.

e) $1+2r+3r^2+4r^3+\cdots+nr^{n-1}=\frac{1-(n+1)r^n+nr^{n+1}}{(1-r)^2}$.

Ejercicio 1.3. Demuestre que las siguientes afirmaciones se cumplen para todo natural n.

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$.

b) $1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\cdots+n\cdot 3^{n-1}=\frac{(2n-1)3^n+1}{4}$.

c) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

d) $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{3}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$.

Ejercicio 1.4. Use Inducción en los siguientes casos

a) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_1=2$ y $a_n=3a_{n-1}$, para todo $n>1$. Demuestre que

$$a_n=2\cdot 3^{n-1},$$

para todo natural $n>1$.

b) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_1 = 2$ y $a_n = a_{n-1}$, para todo $n > 1$. Demuestre que

$$a_n = \frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n}$$

para todo natural $n > 1$.

c) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para todo $n \geq 3$. Demuestre que

$$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

Ejercicio 1.5. Use inducción para demostrar

a) $(1+h)^n > 1 + nh$, $\forall\, h \in \mathbb{R}^+$, $n \geq 2$.

b) $n^2 > 2n+1$, $\forall\, n \geq 3$.

Ejercicio 1.6. Demuestre que

a) $m + n \neq m$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

b) $(m + n^+)^+ = m^+ + n^+$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

c) $m + (n+p) = (m+n) + p$, $\forall\, m, n, p \in \mathbb{N}$.

d) $(m \cdot n^+)^+ = m \cdot n + m^+$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

e) $m^+ + n^+ = (m+n)^+ + 1$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

1.2. SUMATORIAS

1.2.1. Sumatoria Simple

Definición 1.2.1. Una *sucesión real* es toda función con dominio un subconjunto de los números naturales y con valores en $\mathbb{R}$, simbólicamente, la sucesión "a" es $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $n \mapsto a(n) = a_n$.

Observación 1.2.1. Denotamos la sucesión "a" por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde a_n es el término general de la sucesión.

Ejemplo 1.2.1. *Para la sucesión* $((-1)^n 2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, *los tres primeros términos son*

$$a_1 = (-1)^1 2^1 = -2, \quad a_2 = (-1)^2 2^2 = 4, \quad a_3 = (-1)^3 2^3 = -8.$$

Definición 1.2.2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión, definimos la sumatoria de los n primeros términos de la sucesión, denotada $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, por

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{1} a_i = a_1 & \text{si } n = 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i + a_n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Observación 1.2.2. Usando la definición de sumatoria y las propiedades de los números reales podemos escribir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i + a_{n-1}\right) + a_n \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{n-3} a_i + a_{n-2}\right) + a_{n-1}\right) + a_n \\
&= \cdots \\
&= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.2. *Desarrolle y calcule* $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i$ *considerando la sucesión* $(2n+3)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} a_i &= \sum_{i=1}^{3} (2i+3) \\
&= (2\cdot 1 + 3) + (2\cdot 2 + 3) + (2\cdot 3 + 3) \\
&= 5 + 7 + 9 = 21.
\end{aligned}$$

Si nos interesa $\sum\limits_{i=1}^{75} a_i$ necesitamos un poco más de teoría.

Propiedades de la sumatoria simple

Proposición 1.2.1. *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones y* $p \in \mathbb{R}$, *se cumple*

a) Si $a_n = p$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

b) Si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión tal que* $c_n = pa_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} pa_i = p\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

c) Si $(d_i)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión tal que* $d_n = a_n + b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

d) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ *o también* $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$. *(Propiedad telescópica).*

e) $\sum\limits_{i=j}^{n} a_i = \sum\limits_{i=j+r}^{n+r} a_{i-r} = \sum\limits_{i=j-r}^{n-r} a_{i+r}$ *(Propiedad del reloj).*

Demostración. Sólo demostraremos la propiedad b).

Sea $P(n) : \sum\limits_{i=1}^{n} pa_i = p\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

Debemos demostrar a) $P(1)$ es V y b) $[P(1), P(2), \ldots, P(k)]\, V \Rightarrow P(k+1)\, V$.

a) $P(1)$ es V ya que

$$\sum_{i=1}^{1} pa_i = \sum_{i=1}^{1} c_i = c_1 = pa_1 = p\sum_{i=1}^{1} a_i.$$

b) Si

$$\sum_{i=1}^{r} pa_i = p\sum_{i=1}^{r} a_i,\ \forall\, r \leq k$$

debemos demostrar que

$$\sum_{i=1}^{k+1} pa_i = p\sum_{i=1}^{k+1} a_i.$$

Veámoslo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} pa_i &= \sum_{i=1}^{k+1} c_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} c_i + c_{k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k} pa_i + pa_{k+1} \\
&= p\sum_{i=1}^{k} a_i + pa_{k+1} \\
&= p\left[\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\right] \\
&= p\sum_{i=1}^{k+1} a_i.
\end{aligned}$$

□

Algunas Sumatorias Importantes

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

Estas fórmulas que nos permiten "sumar sin sumar", ya fueron demostradas por inducción, sin embargo, es necesario mostrar algún camino que nos lleve a deducirlas, como un ejemplo deduciremos la suma de los cuadrados de los primeros n naturales.

Consideremos $\sum\limits_{i=1}^{n} (i+1)^3$, tenemos,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (i+1)^3 &= \sum_{i=1}^{n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1
\end{aligned}$$

Asumiendo conocida la suma de los primeros n naturales y considerando además que al comparar $\sum\limits_{i=1}^{n}(i+1)^3$ con $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3$ se simplifican terminos al realizar su diferencia, podemos despejar $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$; así,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 &= \sum_{i=1}^{n}(i^3+3i^2+3i+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
\Rightarrow\quad & (n+1)^3 - 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n \\
\Rightarrow\quad & (n+1)^3 - 1 - n - 3\frac{n(n+1)}{2} = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
\Rightarrow\quad & \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)^3 - (n+1) - 3\frac{n(n+1)}{2}}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.3. *Calcule, usando las propiedades* $\sum\limits_{i=1}^{10}(4i^2+2)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10}(4i^2+2) &= \sum_{i=1}^{10} 4i^2 + \sum_{i=1}^{10} 2 \\
&= 4\sum_{i=1}^{10} i^2 + 10\cdot 2 \\
&= 4\frac{10(10+1)(10\cdot 2+1)}{6} + 20 \\
&= 1{,}560.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.4. *Determine la suma de los 20 primeros términos de la sucesión cuyos 5 primeros términos son* $1, 3, 5, 7, 9$.

Solución. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$, es inmediato deducir que $a_n = 2n - 1$, de donde

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} &= \sum_{i=1}^{20} a_i \\ &= \sum_{i=1}^{20} (2i - 1) \\ &= 2\sum_{i=1}^{20} i - 20 \cdot 1 \\ &= 2\frac{20(20+1)}{2} - 20 \\ &= 400. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.5. *Determine una fórmula para* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Solución. Para resolver este problema necesitamos descomponer la fracción racional $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ en fracciones parciales.

Informalmente introduciremos las acciones básicas relacionadas con este tema, el cual se presentará en un Capítulo posterior.

En primer lugar notemos que la fracción racional dada tiene como denominador un polinomio de grado mayor que el polinomio del numerador y que está factorizado en polinomios lineales irreducibles; cada uno de estos factores lineales genera una fracción parcial del tipo $\frac{A}{ax+b}$, de tal manera que debemos encontrar el valor real de A.

Tenemos,

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2},$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A(k+2) + B(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\ &\Rightarrow \quad 1 = A(k+2) + B(k+1). \end{aligned}$$

Si damos valores arbitrarios a k, sucesivamente, podemos determinar A y B.

Si $k = -1$ entonces $1 = A(k+2) + B(k+1)$ queda $1 = A$.
Si $k = -2$ entonces $1 = A(k+2) + B(k+1)$ queda $1 = -B$.

Entonces

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2},$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right).$$

Si consideramos la sucesión $\left(\frac{1}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, usando la propiedad telescópica,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$$

tenemos,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\
&= -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= -\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{n}{2(n+2)}.
\end{aligned}$$

Otra forma de aplicar la propiedad telescópica es cancelar, directamente los terminos en el desarrollo de la sumatoria, así, en

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right),$$

tomando diversos valores de k obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) = (\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}) = \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2} = (\frac{n+2-2}{2(n+2)} =$$

Demostremos que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$$

se cumple en $\mathbb{N}$. Sea $P(n) : \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$,

a) $P(1)$ es V ya que

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6},$$

y por otro lado $\frac{1}{2(1+2)} = \frac{1}{6}$.

b) Si se cumple que $\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{p}{2(p+2)}$ debemos demostrar que

$$\sum_{k=1}^{p+1}\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{p+1}{2(p+3)}.$$

Veámoslo,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \sum_{k=p+1}^{p+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{p}{2(p+2)} + \frac{1}{(p+2)(p+3)} \\
&= \frac{p(p+3)+2}{2(p+2)(p+3)} \\
&= \frac{p^2+3p+2}{2(p+2)(p+3)} \\
&= \frac{p+1}{2(p+3)}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.2.6. *Calcule, usando fórmulas, la suma de todos los números impares entre 100 y 500.*

Solución. Queremos los números impares desde 101 hasta 499. Si escribimos un número impar como $2k-1$ entonces la suma pedida es $\sum_{k=51}^{250}(2k-1)$; tenemos,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=51}^{250}(2k-1) &= \sum_{k=51-50}^{250-50}[2(k+50)-1] \\
&= \sum_{k=1}^{200}(2k+99) \\
&= 2\sum_{k=1}^{200} k + \sum_{k=1}^{200} 99 \\
&= 2\frac{200(201)}{2} + 200(99) \\
&= 60{,}000.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.2.7. *Determine una fórmula para* $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$ *y demuestre la validez de ésta en* $\mathbb{N}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k &= -1+2-3+4-5+\cdots-(2n-1)+2n \\
&= -(1+3+5+\cdots+(2n-1))+(2+4+6+\cdots+2n) \\
&= -\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+\sum_{k=1}^{n}2k \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-2k+1+2k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}1 \\
&= n.
\end{aligned}$$

Veamos ahora la inducción pedida.

Sea $P(n) : \sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k k = n$.

a) Como $\sum_{k=1}^{2\cdot 1}(-1)^k k = -1+2 = 1$ entonces se cumple $P(1)$.

b) Si $P(r)$ se cumple, es decir, si $\sum_{k=1}^{2r}(-1)^k k = r$, debemos demostrar que $P(r+1)$ también se cumple, es decir, debemos demostrar que $\sum_{k=1}^{2(r+1)}(-1)^k k = r+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(r+1)}(-1)^k k &= \sum_{k=1}^{2r+2}(-1)^k k \\
&= \sum_{k=1}^{2r}(-1)^k k-(2r+1)+(2r+2) \\
&= r-(2r+1)+(2r+2) \\
&= r+1.
\end{aligned}$$

1.2.2. Sumatoria Doble

Definición de Sumatoria Doble

Supongamos el siguiente arreglo rectangular de números

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}
\end{pmatrix}$$

Si sumamos los términos de la primera fila obtenemos $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j}$.

Si sumamos los términos de la segunda fila obtenemos $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{2j}$.

Si sumamos los términos de la n-ésima fila obtenemos $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{nj}$.

Ahora, si sumamos estas sumas obtenemos $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}\right)$.

Por otro lado,

si sumamos los términos de la primera columna obtenemos $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}$.

Si sumamos los términos de la segunda columna obtenemos $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2}$.

Si sumamos los términos de la m-ésima columna obtenemos $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{im}$.

Ahora, si sumamos estas sumas obtenemos $\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$.

Naturalmente que estas sumas dobles son iguales (forman la suma de todos los términos del arreglo) por lo que podemos afirmar que (aceptando como definición)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Propiedades de la Sumatoria Doble

Se cumple:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} k = nmk,\ k \in \mathbb{R}$.

b) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} ka_{ij} = k\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij},\ k \in \mathbb{R}$.

c) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} (a_i + b_j) = n\sum\limits_{j=1}^{m} b_j + m\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

d) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_i b_j = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{m} b_j\right)$.

Si aplicamos la suma iterada a la sumatoria doble podemos mostrar las propiedades, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[ma_i+\sum_{j=1}^{m}b_j\right]\\
&= m\sum_{i=1}^{n}a_i+n\sum_{j=1}^{m}b_j.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.8. *Calcule* $\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{4}(2i+j)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(2i+j) &= 3\sum_{j=1}^{4}j+4\sum_{i=1}^{3}2i\\
&= 3\frac{4(4+1)}{2}+4\cdot 2\frac{3(3+1)}{2}\\
&= 78.
\end{aligned}$$

1.2.3. Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1.1. Si se sabe que

$$\sum_{i=1}^{6}(2x_i-3)=18,\quad \sum_{i=1}^{5}(x_i-6)^2=182 \quad \text{y} \quad x_6=8,$$

determine el valor de $\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2$. Resp. 186.

Ejercicio 1.2. Sabiendo que $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=2n^2+3n$ encuentre el valor de $\sum\limits_{i=1}^{6}\frac{a_i-5}{3}$ y a_3. Resp. 20; 13.

Ejercicio 1.3. Determine el valor de $\sum\limits_{i=5}^{15}i(i-3)$.

Ejercicio 1.4. Si se sabe que

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 196; \quad \sum_{i=1}^{10}(2x_i-3)^2 = 1130, \quad x_8 = x_9 = -3x_{10} = 5,$$

determine el valor de $\sum\limits_{i=1}^{7} x_i$.

Ejercicio 1.5. Si

$$\sum_{i=1}^{6}(2x_i-1)^2 = 4, \quad \sum_{i=1}^{7}(x_i+1)(x_i-1) = 129 \quad \text{y} \quad x_7 = -4,$$

determine el valor de $\sum\limits_{i=1}^{7}(2x_i-5)\sum\limits_{i=1}^{6}(2x_i+3)^2$.

Ejercicio 1.6. Encuentre una fórmula que permita sumar los n primeros términos de la sucesión

a) $(2n-1)_{n\in\mathbb{N}}$. Resp. n^2.

b) $\left(6n^3\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Resp. $n(n+1)(2n+1)$.

Ejercicio 1.7. Calcule

a) $3+6+\cdots+198$. Resp. 6.633.

b) $-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2-\cdots-99^2+100^2$.

c) $2+4+6+8+\cdots+200$. Resp. 10.100.

d) $1+3+5+7+9+\cdots+199$. Resp. 10.000.

e) $-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2-\cdots-99^2+100^2$.

Ejercicio 1.8. Calcule

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100}\left[\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{(i+1)(i+2)}\right]$. Resp. $\frac{2{,}575}{5{,}151}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{k}{k+1}-\frac{k-1}{k}\right]$. Resp. $\frac{100}{101}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[(k+1)\ln(k+1)-k\ln(k)]$. Resp. $(n+1)\ln(n+1)$.

Ejercicio 1.9. Usando descomposición en fracciones parciales y propiedad telescópica, determine una fórmula para

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$. Resp. $\frac{n}{n+1}$.

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+3)(2i+1)}$. Resp. $\frac{n}{3(2n+3)}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)}$. Resp. $\frac{3}{4} - \frac{4n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k(k+1)2^k}$. Resp. $1 - \frac{1}{(n+1)2^n}$.

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$. Resp. $\frac{7}{36} - \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)} + \frac{1}{6(n+3)}$.

Ejercicio 1.10. Resuelva la ecuación

$$x^2 \sum_{i=1}^{5} (2i^2 + i + 1) - \sum_{i=1}^{4} (i + 3i^2) = x \sum_{i=1}^{3} (2i^2 + 8i).$$

Ejercicio 1.11. Determine el valor de las siguientes sumatorias

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} (3i-5)$.

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{(i+3)}{i}$.

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} (i-3)(2i+5)$.

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=2}^{6} (i-2)(j+2)$.

e) $\displaystyle\sum_{i=0}^{5} \sum_{j=1}^{3} (2i-3i)\left(\frac{i+2}{j}\right)$.

Ejercicio 1.12. Si se sabe que

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 30, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 18,$$

determine el valor de $\sum_{i=1}^{5}(x_i - 2)^2$. Resp. -22.

Ejercicio 1.13. Si

$$\sum_{i=1}^{6}(a_i - 3)^2 = \sum_{i=1}^{6}(a_i + 2)^2 \quad \text{y} \quad \frac{\sum_{i=1}^{6} a_i^2}{\sum_{i=1}^{6} a_i} = 10,$$

determine el valor de $\sum_{i=1}^{6} a_i(a_i - 3)$. Resp. 21.

Ejercicio 1.14. Dado

$$\sum_{i=1}^{10}(2x_i - 3)^2 = 1130, \quad \sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 196, \quad x_8 = 3, \quad x_9 = 3, \quad x_{10} = -5.$$

¿Cuál es el valor de $\sum_{i=1}^{7} x_i$?. Resp. -11.

Ejercicio 1.15. Si

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 12, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i(2 - 3x_i) = -306,$$

determine el valor de $\sum_{i=1}^{4}(x_i + 2)^2$. Resp. 174.

Ejercicio 1.16. Dado

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 25 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{8} x_1 = 12,$$

determine el valor k si $\sum_{i=1}^{8}(4x_i - 2k)^2 = 4{,}000$. Resp. $k = 0$, $k = 6$.

Ejercicio 1.17. Calcule el valor de la constante c, si se sabe que

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5}(2x_i - 3y_j + c) = 6{,}000, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i = 18, \quad \sum_{j=1}^{5} y_j = 22.$$

Resp. 207.2.

1.3. PROGRESIONES

1.3.1. Progresión Aritmética

Definición 1.3.1. Una sucesión real $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama Progresión Aritmética, denotada P.A. si

$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_{n+1} = a_n + d, \text{ para algún } d \in \mathbb{R} - \{0\}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Observación 1.3.1.

1. a_1 se llama "primer elemento de la P.A.".
2. $d = a_{n+1} - a_n$ se llama "diferencia de la P.A.".
3. Si $d > 0$ entonces la P.A. es creciente.

   Si $d < 0$ entonces la P.A. es decreciente.
4. Si a, b, c están en P.A. entonces $b - a = c - b$, es decir, $2b = a + c$.

Ejemplo 1.3.1.

1. *La sucesión de los números naturales es una P.A. con primer elemento* $a_1 = 1$ *y diferencia* $d = 1$.
2. *La sucesión formada por los números:* $7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, \ldots$ *es una P.A. con primer elemento* $a_1 = 7$ *y diferencia* $d = -2$. *Observe que* $-2 = 5 - 7 = 3 - 5 = -1 - 1 = \ldots$.

Teorema Regulatorio

Teorema 1.3.1. *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una P.A. con primer elemento* a_1 *y diferencia* d *entonces*

a) $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$.

Demostración.

a) Sea $P(n) : a_n = a_1 + (n-1)d$.

   a) $P(1)$ es V ya que $a_1 = a_1 + (1-1)d$.

   b) Si $P(k)$ es verdadero, es decir, si $a_k = a_1 + (k-1)d$, debemos demostrar que $P(k+1)$ también es verdadero , es decir, debemos demostrar que $a_{k+1} = a_1 + ((k+1)-1)d$; veámoslo,

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd.$$

b) Usaremos el Segundo Principio de Inducción Matemática.

Sea $P(n) : \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$, debemos demostrar a) $P(1)$ es V y b) si $P(n)$ es V $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq k$, entonces $P(n+1)$ es V.

a) $P(1)$ es verdadero ya que $\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$ y por otro lado $\frac{1}{2}[2a_1 + (1-1)d] = a_1$.

b) Si $P(n)$ es V $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq k$ entonces se cumple $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$, debemos demostrar que $P(n+1)$ es verdadero, es decir, que $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \frac{n+1}{2}[2a_1 + nd]$.

Veámoslo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} a_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{n+1} a_i \\
&= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] + a_{n+1} \\
&= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] + a_1 + nd \\
&= na_1 + \frac{n}{2}(n-1)d + a_1 + nd \\
&= (n+1)a_1 + \left[\frac{n}{2}(n-1) + n\right] d \\
&= (n+1)a_1 + \frac{n(n+1)}{2} d \\
&= \frac{n+1}{2}[2a_1 + nd].
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.3.2. *En una P.A. cuyos tres primeros términos son:* $5, 11, 17$ *determine*

a) el quinto término,

b) la suma de los 17 primeros términos.

Solución. Como $a_1 = 5$ y $d = 11 - 5 = 6$ entonces

a) $a_5 = a_1 + 4d = 5 + 4 \cdot 6 = 29$.

b) $\sum\limits_{i=1}^{17} a_i = \frac{17}{2}[2 \cdot 5 + 16 \cdot 6] = 901$.

Ejemplo 1.3.3. *Interpolar (intercalar) ocho medios aritméticos entre 6 y 36.*

Solución. Estamos considerando una P.A. donde el primer término es $a_1 = 6$ y el décimo término es $a_{10} = 36$. Necesitamos la diferencia d.

Como $a_{10} = a_1 + 9d$ entonces $36 = 6 + 9d$ de donde $d = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$, así, los términos pedidos son,

$$a_2 = 6 + 3\tfrac{1}{3} = 9\tfrac{1}{3} \quad , \quad a_3 = 9\tfrac{1}{3} + 3\tfrac{1}{3} = 12\tfrac{2}{3} \text{ ò } a_3 = 6 + 2\left(3\tfrac{1}{3}\right) = 12\tfrac{2}{3} \quad , \quad a_4 = 16,$$

$$a_5 = 19\tfrac{1}{3} \quad , \quad a_6 = 22\tfrac{2}{3} \quad , \quad a_7 = 26 \quad , \quad a_8 = 29\tfrac{1}{3} \quad , \quad a_9 = 32\tfrac{2}{3}.$$

Ejemplo 1.3.4. *Determinar tres números en P.A. cuya suma sea 15 y la suma de los cuadrados sea 83.*

Solución. Consideremos $a_1 = x - d$, $a_2 = x$, $a_3 = x + d$ los tres números en P.A. Como $(x - d) + x + (x + d) = 15$ entonces $x = 5$, así los números son:

$$a_1 = 5 - d \quad , \quad a_2 = 5 \quad , \quad a_3 = 5 + d.$$

Dado que la suma de los cuadrados de los números debe ser igual a 83 entonces obtenemos la ecuación $(5 - d)^2 + 5^2 + (5 + d)^2 = 83$; al resolver esta ecuación de segundo grado obtenemos $d_1 = 2$, $d_2 = -2$.

Si $d = 2$, $x = 5$ tenemos $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$; una P.A. creciente.

Si $d = -2$, $x = 5$ tenemos $a_1 = 7$, $a_2 = 5$, $a_3 = 3$; una P.A. decreciente.

1.3.2. Progresión Geométrica

Definición 1.3.2. Una sucesión real $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama Progresión Geométrica, denotada P.G. si

$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_{n+1} = a_n \cdot r, \text{ para algún } r \in \mathbb{R} - \{0, 1\}\,, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Observación 1.3.2.

1. a_1 se llama "primer elemento de la P.G.".
2. $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ se llama "razón de la P.G.".
3. Si $r > 1$ entonces la P.G. es creciente.

   Si $0 < r < 1$ entonces la P.G. es decreciente.

   Si $r < 0$ entonces la P.G. es oscilante.
4. Si a, b, c están en P.G. entonces $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, es decir, $b^2 = ac$.

Ejemplo 1.3.5.

1. *La sucesión cuyos primeros términos son* $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ *es una P.G., donde el primer término es* $a_1 = 2$ *y la razón es* $r = 2 = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{64}{32} = \ldots$
2. *Si los 4 primeros términos de una P.G. son* $3, -6, 12, -24$ *entonces el primer término es* $a_1 = 3$ *y la razón es* $r = -2$.

Teorema Regulatorio

Teorema 1.3.2. *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una P.G. con primer elemento* a_1 *y* $r \neq 1$, $r \neq 0$ *entonces*

a) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$.

Demostración. Veamos, antes de realizar la demostración, la forma en que se producen las fórmulas propuestas.

a)

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_2 \cdot r = (a_1 \cdot r) \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot r = (a_1 \cdot r^2) \cdot r = a_1 \cdot r^3 \end{aligned}$$

Resulta inmediato creer que $a_a = a_1 \cdot r^{n-1}$.

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \cdots + a_1 \cdot r^{n-2} + a_1 \cdot r^{n-1}.$$

Si multiplicamos esta última igualdad por r obtenemos

$$r\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \cdots + a_1 \cdot r^{n-2} + a_1 \cdot r^{n-1} + a_1 \cdot r^n;$$

al restar las dos expresiones tenemos $\sum_{i=1}^{n} a_i - r\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 - a_1 \cdot r^n$, así $(1-r)\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1(1-r^n)$, de donde, finalmente

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Demostremos ahora, por inducción, las formulas obtenidas.

a) Sea $P(n) : a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ entonces,

i) $P(1)$ es verdadero ya que $a_1 = a_1 \cdot r^{1-1}$.

ii) Si $P(k)$ es verdadero, es decir si $a_k = a_1 \cdot r^{k-1}$ debemos demostrar que $a_{k+1} = a_1 \cdot r^k$. Veamos esto último,

$$a_{k+1} = a_k \cdot r = (a_1 \cdot r^{k-1}) \cdot r = a_1 \cdot r^k.$$

b) Sea $P(n) : \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$.

i) $P(1)$ es verdadero ya que $\sum\limits_{i=1}^{1} a_i = a_1 = a_1 \frac{1-r^1}{1-r}$.

ii) Si $P(k)$ es verdadero, es decir si $\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 \frac{1-r^k}{1-r}$ debemos demostrar que $\sum_{i=1}^{k+1} a_i = a_1 \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$; tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} a_i &= \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1} \\
&= a_1 \frac{1-r^k}{1-r} + a_1 \cdot r^k \\
&= a_1 \left(\frac{1-r^k}{1-r} + r^k \right) \\
&= a_1 \frac{1-r^k+r^k-r^{k+1}}{1-r} \\
&= a_1 \frac{1-r^{k+1}}{1-r}
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 1.3.6. *En una P.G. cuyos tres primeros términos son* $3, 6, 12$, *determine*

a) el quinto término,

b) la suma de los diez primeros términos.

Solución. Como el primer término de la P.G. es $a_1 = 3$ y la razón es $r = 2$ entonces

a) $a_5 = a_1 \cdot r^4 = 3 \cdot 2^4 = 48$.

b) $\sum\limits_{i=1}^{10} a_i = a_1 \frac{1-r^{10}}{1-r} = 3 \frac{1-2^{10}}{1-2} = 3{,}069$.

Ejemplo 1.3.7. *¿Qué lugar ocupa el término de valor* $\frac{27}{4}$ *en una P.G. que tiene primer elemento con valor* $\frac{4}{3}$ *tal que la razón es* $r = \frac{3}{2}$*?.*

Solución. Como $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ entonces queremos n, tal que $\frac{27}{4} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$,

$$\frac{27}{4} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{27}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

así, $n = 5$ y entonces el quinto término tiene valor $\frac{27}{4}$.

Ejemplo 1.3.8. *La suma de tres números en P.G. es 70, si se multiplica los dos extremos por 4 y el término central por 5 entonces los nuevos números están en P.A. Determine los números originales.*

Solución. Si denotamos por a al primer número entonces, los otros números son ar y ar^2. Por los datos disponibles obtenemos la ecuación $a + ar + ar^2 = 70$.

Por otro lado, los números $4a, 5ar, 4ar^2$ quedan en P.A. y entonces, la ecuación que podemos deducir es $5ar - 4a = 4ar^2 - 5ar$ (ambos lados son igual a d); arreglando esta última expresión obtenemos $4ar^2 - 10ar + 4a = 0$.

Como $a \neq 0$ entonces la ecuación queda $4r^2 - 10r + 4 = 0$, la cual tiene solución $r = 2$, $r = \frac{1}{2}$.

Reemplazando en la primera ecuación deducida obtenemos:

$r = 2 \Rightarrow a + 2a + 4a = 70 \Rightarrow a = 10$, así, los números pedidos son 10, 20, 40,

$r = \frac{1}{2} \Rightarrow a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a = 70 \Rightarrow a = 40$, así, los números pedidos son 40, 20, 10.

Ejemplo 1.3.9. *Los recíprocos de $b - a$, $2b$, $b - c$ forman una Progresión Aritmética, demuestre que a, b, c están en Progresión Geométrica.*

Solución.

Si $\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b-c}$ están en P.A. entonces se cumple $\frac{1}{2b} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{2b}$, usando ésta igualdad debemos probar que $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, es decir, que $b^2 = ac$.

Si $\frac{1}{2b} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{2b}$ entonces $\frac{b-a-2b}{2b(b-a)} = \frac{2b-(b-c)}{2b(b-c)}$, es decir $\frac{-b-a}{b-a} = \frac{b+c}{b-c}$, al seguir trabajando obtenemos $b^2 = ac$.

1.3.3. Progresión Armónica

Definición 1.3.3. Una sucesión real $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama Progresión Armónica, denotada P.H., si $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una Progresión Aritmética; $a_n \neq 0$, $\forall\, n$.

Ejemplo 1.3.10. *La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ es una P.H. ya que la sucesión formada por los recíprocos $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ es una P.A.*

Ejemplo 1.3.11. *Si los números x, y, z están en P.H. demuestre que $y = \frac{2xz}{x+z}$.*

Solución. Si x, y, z están en P.H. entonces $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ están en P.A.

Si $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ están en P.A. entonces $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}$ de donde $\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$, finalmente $y = \frac{2xz}{x+z}$.

1.3.4. Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1.1. Se sabe que los dos primeros términos de una P.A. son $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_2 = \frac{2}{3}$. Determine, a) a_5, b) a_{x-2} y c) $\sum_{i=1}^{15} a_i$.

Ejercicio 1.2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una P.A. Si se sabe que

a) La suma del tercer y cuarto término es igual a 43 y que la diferencia entre el octavo término con el quinto término es igual a 9 ($a_8 - a_5 = 9$). Determine el primer término.

b) La suma del cuarto término con el sexto término es igual a 8 y la suma del quinto y noveno término es igual a 9. Determine el segundo término.

c) La diferencia d es el 40 % de a_1. Exprese a_2 como porcentaje de la suma de los 10 primeros términos.

d) El primer término es -2, el último término es 29 y la suma es 162. Cuál es la diferencia d?.

e) El tercer término es igual al cuádruple del primero y el sexto término tiene valor 17. Determine la progresión.

Ejercicio 1.3. Sea $A = \left\{ a_i \,/\, a_i = \frac{1-\sqrt{2}}{2} + \frac{(i-1)\sqrt{2}}{2},\ 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Demuestre que los elementos de A están en P.A.

b) Determine $\sum_{k=1}^{i} a_k$.

Ejercicio 1.4. ¿Cuántos términos de la P.A. cuyos tres primeros términos son $-6\frac{4}{5}, -6\frac{2}{5}, -6$ se deben sumar para obtener $-52\frac{4}{5}$?.

Ejercicio 1.5. La suma de tres números en P.A. es 39 y su producto es 2184. Determine los números.

Ejercicio 1.6. La suma de 5 números en P.A. es 40 y la suma de sus cuadrados es 410. Determine los números.

Ejercicio 1.7. La suma de los p primeros términos de una P.A. es q, y la suma de los q primeros términos es p. Calcule la suma de los $p+q$ primeros términos.

Ejercicio 1.8. Sumar los n primeros términos de las siguientes P.A.

a) $2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \ldots$.

b) $\frac{6}{\sqrt{2}}, 10\sqrt{2}, \frac{34}{\sqrt{2}}, \ldots$.

c) $2a - b, 4a - 3b, 6a - 5b, \ldots$.

d) $\frac{a+b}{2}, a, \frac{3a-b}{2}, \ldots$.

e) $\frac{2a^2-1}{a}, 4a - \frac{3}{a}, \frac{6a^2-5}{a}, \ldots$.

f) $\frac{1+k}{1-k}, \frac{4k}{1-k^2}, \ldots$.

Ejercicio 1.9. La suma de tres números en P.A es 12 y la suma de sus cubos es 408, determine los números.

Ejercicio 1.10. Demostrar que la suma de un número impar de términos de una P.A. es igual al término central multiplicado por el número de términos.

Ejercicio 1.11. Verificar que el cuadrado de las cantidades $a^2 - 2a - 1, a^2 + 1, a^2 + 2a - 1$ forman una P.A.

Ejercicio 1.12. Una empresa tiene una producción de 20.000 unidades en el primer año e incrementa su producción, cada año, en 1.200 unidades.

a) ¿Cuánto producirá el quinto año?.

b) ¿Cuál será la producción total en los primeros 5 años?.

Ejercicio 1.13. La producción de una empresa es de 15.000 el primer año, luego la producción disminuye a razón de 750 por año.

a) ¿Cuál es la producción total en los primeros cinco años?.

b) ¿Cuándo la producción será nula?.

c) ¿Cuánto habrá producido la empresa hasta que la producción sea nula?.

Ejercicio 1.14. Una empresa A tiene una producción inicial de 1.000 unidades y disminuye a razón de 100 unidades por año. Una empresa B tiene una producción inicial de 500 unidades (el año inicial es el mismo en ambas empresas) y aumenta su producción en 25 unidades cada año.

a) ¿Cuándo serán iguales las producciones de A y B?.

b) ¿Cuándo será nula la producción de A?.

c) ¿Cuál será la producción de B ese mismo año?.

Ejercicio 1.15. En una P.G. la suma de tres términos es 224 y la suma de los extremos excede en 96 al término central. Calcule los números.

Ejercicio 1.16. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una P.G.,

a) Si $a_1 + a_2 = 28$ y $a_3 + a_4 = 175$ calcule el quinto término.

b) Si $a_2 + a_3 = 30$ y $a_3 - a_1 = 8$ calcule el primer término.

Ejercicio 1.17. Sume los n primeros términos en cada una de las siguientes P.G.

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$.

b) $1, 5, 25, \ldots$.

c) $24, 12, 6, \ldots$.

Ejercicio 1.18. Interpolar 5 medios geométricos entre $3\frac{5}{9}$ y $40\frac{1}{2}$.

Ejercicio 1.19. Si a, b, c, d están en P.G. demuestre que $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$.

Ejercicio 1.20. Intercalar dos números reales entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{9}{4}$ de modo que los tres primeros formen una P.A. y los tres últimos formen una P.G.

Ejercicio 1.21. Sean x, y, z tres números en P.A., tales que su suma es 24. Si restamos uno al primer término y dos al segundo, los nuevos números quedan en P.G., determine los números originales.

Ejercicio 1.22. Calcule la suma de todos los números impares entre 100 y 500.

Ejercicio 1.23. Si $\frac{a+b}{2}, b, \frac{b+c}{2}$ están en P.H. demuestre que a, b, c están en P.G..

Ejercicio 1.24. Interpolar dos medios armónicos entre 5 y 11.

Ejercicio 1.25. Si 12 y 4.815 son los medios geométricos y armónicos, respectivamente, entre dos números; determine estos números.

Ejercicio 1.26. La suma de los 50 primeros términos de una P.A. es 200 y la suma de los siguientes 50 términos es 2700. Determine el primer término y la diferencia.

Ejercicio 1.27. Si a^2, b^2, c^2 están en P.A., demuestre que $(c+b)$, $(a+c)$ y $(b+a)$ están en P.H.

Ejercicio 1.28. La suma de los 6 primeros términos de una P.G. es 9 veces la suma de los 3 primeros términos. Determine la razón.

1.4. ANALISIS COMBINATORIO

Podemos considerar el *análisis combinatorio* como el conjunto de procedimientos y técnicas que nos permite determinar el número de subconjuntos que pueden formarse a partir de un conjunto dado, de acuerdo a ciertas instrucciones.

Estas deben indicar claramente como se diferencian dos subconjuntos entre si, de acuerdo a:

- la naturaleza de los elementos,
- el orden de los elementos.

Realizaremos el análisis combinatorio sin repetición, es decir, cada elemento debe aparecer una única vez en cada subconjunto.

1.4.1. Principio del Análisis Combinatorio

Si un evento, hecho o suceso se realiza de "n" formas distintas y otro evento, independiente del anterior, se realiza de "r" formas distintas entonces, los dos eventos se realizan, conjuntamente, de "nr" formas distintas.

Observación 1.4.1. Al Principio del Análisis Combinatorio también se le llama Principio Multiplicativo.

Ejemplo 1.4.1. *Si entre dos ciudades A y B existe una línea de buses que las une y que dispone de 10 máquinas en uso. ¿De cuántas maneras una persona puede ir de A a B y volver en un bus distinto?.*

Solución. Como ir de A a B se puede realizar de 10 maneras distintas y volver de B a A de puede hacer de 9 otras formas distintas entonces, realizar el viaje completo, en las condiciones planteadas, se realiza de $10 \cdot 9 = 90$ maneras.

1.4.2. Factorial de un Número

Definición 1.4.1. Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos el factorial de n, denotado $n!$, que se lee "factorial de n" como

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 1.4.2.

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24.$$

Observación 1.4.2. Es inmediato notar que $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Ejemplo 1.4.3. *Determine* $\frac{x!}{(x-2)!}$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{x!}{(x-2)!} &= \frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!}\\ &= x(x-1).\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.4. *Solucione la ecuación* $\frac{(x-1)!+2(x+1)!}{x!-(x-1)!} = 13$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{(x-1)!+2(x+1)!}{x!-(x-1)!} = 13 &\Rightarrow \frac{(x-1)!+2(x+1)x(x-1)!}{x(x-1)!-(x-1)!} = 13\\ &\Rightarrow \frac{(x-1)![1+2x(x+1)]}{(x-1)!(x-1)} = 13\\ &\Rightarrow \frac{1+2x(x+1)}{x-1} = 13\\ &\Rightarrow 2x^2 - 11x + 14 = 0\\ &\Rightarrow x = \begin{cases} x_1 = \frac{7}{2}\\ x_2 = 2\end{cases}\end{aligned}$$

Naturalmente que la solución es $x = 2$.

1.4.3. Variaciones

Sea A un conjunto con n elementos, llamamos variación de orden k, $k \leq n$, a todo subconjunto ordenado de A que tenga k elementos.

Observación 1.4.3. Dos variaciones de orden k son diferentes si tienen al menos un elemento distinto o si teniendo los mismos elementos, estos están en distinto orden.

El número total de variaciones de orden k que se puede formar, seleccionado los elementos de un conjunto que tiene n elementos se denota $V(n,k)$ o V_n^k.

Proposición 1.4.1. *El número de variaciones* $V(n,k)$ *es* $V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Demostración. El primer lugar de la k-upla se puede llenar de n formas distintas.

El segundo lugar de la k-upla se puede llenar de $n-1$ formas distintas.

El tercer lugar de la k-upla se puede llenar de $n-2$ formas distintas.

$\vdots$

El k-ésimo lugar de la k-upla se puede llenar de $n-(k-1)$ formas distintas.

Usando el Principio Multiplicativo, llenar los k lugares de la k-upla se puede realizar de $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1))$ formas, ahora,

$$\begin{aligned} V(n,k) &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1)) \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1)) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.4.5. *¿Cuántas palabras de 3 letras se puede formar usando las letras a, b, c, d?.*

Solución. Como el orden de las letras en cada palabra interesa entonces estamos frente a variaciones y la respuesta es: $V(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$.

Ejemplo 1.4.6. *¿Cuántas señales diferentes se puede formar, si disponemos de 6 banderas de colores diferentes las cuales se colocan en un mástil, una tras otra, si se puede usar cualquier número de ellas a la vez?.*

Solución. Como el orden de las banderas en el mástil es importante entonces el problema es de variaciones y la respuesta es $\sum_{k=1}^{6} V(6,k)$.

1.4.4. Permutaciones

Una permutación de orden n es toda variación de orden n.

Observación 1.4.4. Dos permutaciones de orden n tienen los mismos elementos y son diferentes sólo por el distinto orden que presentan los elementos. Al número total de permutaciones de orden lo denotamos P_n.

Proposición 1.4.2. *El número de permutaciones de orden n es $P_n = n!$.*

Demostración.
$$P_n = V(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

□

Ejemplo 1.4.7. *¿De cuántas maneras se puede ordenar 6 libros en un estante?.*

Solución. De $P_6 = 6! = 720$ formas distintas.

Si de estos libros, 3 de ellos forman una colección y por lo tanto van juntos, el número total de distribuirlos es ahora $P_4 = 4! = 24$ maneras.

1.4.5. Combinaciones

Sea A un conjunto que tiene n elementos, llamamos combinación de orden k, $k \leq n$, a todo subconjunto de A formado por k elementos.

Observación 1.4.5. Dos combinaciones de orden k son diferentes sólo si tienen al menos un elemento diferente, dado que el orden de los elementos no interesa.

Al número total de combinaciones de orden k lo denotamos $C(n,k)$ o también por $\binom{n}{k}$.

Proposición 1.4.3.

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Demostración. Como cada variación de orden k genera $k!$ variaciones de orden k entonces $k!C(n,k) = V(n,k)$, de donde

$$C(n,k) = \frac{V(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

Ejemplo 1.4.8. *Si una prueba contiene 7 preguntas y el alumno debe responder sólo 4 de ellas. ¿Cuántas posibles tipos de pruebas espera como respuesta el corrector?.*

Solución. Como el orden de las respuestas no interesa, el número pedido es $C(7,4) = \binom{7}{4} = 35$.

Ejemplo 1.4.9. *En un grupo de 15 muchachos y 10 niñas, ¿de cuántas maneras puede formarse un grupo compuesto por 3 muchachos y 2 niñas?.*

Solución. Como al formar el grupo no interesa el orden entonces, los 3 muchachos pueden seleccionarse entre los 15 disponibles de $C(15,3)$ formas, por otro lado las 2 niñas pueden seleccionarse de entre las 10 niñas de $C(10,2)$.

Usando el Principio Multiplicativo concluimos que, el grupo puede formarse de $C(15,3) \cdot C(10,2) = 20{,}475$ maneras.

Observación 1.4.6. Se cumple:

a) $\displaystyle\binom{n}{n} = 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

b) $\displaystyle\binom{n}{0} = 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

c) $\displaystyle\binom{n}{n-1} = n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

d) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \ \forall n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k < n.$

e) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $\forall n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k < n$.

Demostración.

e)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n![k+1+n-k]}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.4.10. *Compruebe que*

$$\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+2}{k+2} = \binom{n+3}{k+2}.$$

Solución. Usando la última afirmación tenemos

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+2}{k+2} &= \binom{n+2}{k+1} + \binom{n+2}{k+2} \\
&= \binom{n+3}{k+2}.
\end{aligned}$$

1.4.6. Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1.1. Existen 3 caminos para ir de las ciudad X a la ciudad Y, y 2 caminos para ir de la ciudad Y a la ciudad Z. ¿Cuántas rutas distintas puede realizar una persona para ir desde X a Z?. Resp. 6 rutas.

Ejercicio 1.2. ¿Cuántos números de 4 dígitos se pueden formar con los dígitos $1, 2, 3, 4$?. ¿Cuántos de tales números son menores que 3.000?. Resp. 12 números son menores que 3.000.

Ejercicio 1.3. ¿Cuántas señales puede mostrar un barco que dispone de 7 banderas, si cada señal consiste de 5 banderas colocadas verticalmente en un asta?. Resp. 2.500 señales.

Ejercicio 1.4. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse 9 estudiantes en 3 habitaciones donde cupen 3 estudiantes en cada una?. Resp. 1.680.

Ejercicio 1.5. ¿Cuántas palabras que contengan 3 consonantes y 2 vocales se pueden formar con 6 consonantes y 4 vocales?. Resp. 14.400.

Ejercicio 1.6. En una reunión hay 16 estudiantes y 4 profesores,

a) ¿Cuántas comisiones de 5 personas cada una pueden formarse si en cada una de ellas deben participar 2 profesores?. Resp. 3.360.

b) ¿Cuántas comisiones de 5 personas cada una pueden formarse si en cada una de ellas participan a lo más 2 profesores?.

Ejercicio 1.7. De un naipe de 52 cartas se extraen, al azar, 3 de ellas. Determine,

a) El numero de grupos que se puede formar. Resp. $\binom{52}{3}$.

b) El número de maneras de extraer un as. Resp. $\binom{4}{1}\binom{48}{2}$.

c) El número de maneras de extraer al menos un as.

Ejercicio 1.8. Si 4 personas entran a un cine en el cual hay 7 lugares vacíos, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden sentar?. Resp. 840.

Ejercicio 1.9. Simplifique

a) $\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!}$.

b) $\dfrac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k-1}}$.

c) $\binom{4n}{3n}\binom{3n}{2n}\binom{2n}{n}$.

d) $\frac{(n+1)!-(n-1)!}{n!}$.

Ejercicio 1.10. Resuelva las siguientes ecuaciones

a) $\dbinom{2x}{x-1} \div \dbinom{2x-2}{x} = \dfrac{132}{35}$. Resp. $x = 6$.

b) $\dfrac{\binom{x}{4} - \binom{x}{3}}{\binom{x}{4} + \binom{x}{3}} = \dfrac{3}{4}$. Resp. $x = 31$.

c) $\dfrac{(2x)!}{(x-1)!(x+1)!} \cdot \dfrac{x!(x-2)!}{(2x-2)!} = \dfrac{132}{35}$. Resp. $x = 6$.

Ejercicio 1.11. Verifique que $2n! - (n-1)!(n-1) = n! + (n-1)!$.

Ejercicio 1.12. Verifique si se cumple

$$\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2} = \binom{n+2}{k}.$$

Ejercicio 1.13. Verifique que,

$$\binom{n+2}{k+3} + 3\binom{n+2}{k+2} + 3\binom{n+2}{k+1} + \binom{n+2}{k} = \binom{n+5}{k+3}.$$

1.5. TEOREMA DEL BINOMIO

1.5.1. Teorema y Propiedades

Teorema 1.5.1. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Demostración. Sea $P(n) : (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

a) $P(1)$ es verdadero ya que $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$, esto último dado que

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 = a + b.$$

b) Si $P(r)$ es verdadero, es decir, si $(a+b)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a^{r-k} b^k$ debemos demostrar que $(a+b)^{r+1} = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} a^{r+1-k} b^k$. Veámoslo,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{r+1} &= (a+b)^r (a+b) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a^{r-k} b^k \right) (a+b) \\
&= \left[\binom{r}{0} a^r + \binom{r}{1} a^{r-1} b + \cdots + \binom{r}{k-1} a^{r-(k-1)} b^{k-1} \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \binom{r}{r} b^r \right] (a+b) \\
&= \binom{r}{0} a^{r+1} + \binom{r}{1} a^r b + \cdots + \binom{r}{k-1} a^{r-k+2} b^{k-1} + \cdots + \binom{r}{r} a b^r \\
&= \binom{r}{0} a^r b + \binom{r}{1} a^{r-1} b^2 + \cdots + \binom{r}{k-1} a^{r-k+1} b^k + \cdots + \binom{r}{r} b^{r+1} \\
&= \binom{r}{0} a^{r+1} + \left[\binom{r}{1} + \binom{r}{0} \right] a^r b + \cdots + \left[\binom{r}{r} + \binom{r}{r-1} \right] a b^r \\
&\quad + \binom{r}{r} b^{r+1} \\
&= \binom{r+1}{0} a^{r+1} + \binom{r+1}{1} a^r b + \cdots + \binom{r+1}{r} a b^r + \binom{r+1}{r+1} b^{r+1} \\
&= (a+b)^{r+1}.
\end{aligned}$$

□

Observación 1.5.1.

1. Desarrollando la sumatoria obtenemos,

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} \\
&\quad + \cdots + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n
\end{aligned}$$

es decir, en el desarrollo de $(a+b)^n$ obtenemos $(n+1)$ términos.

2. El término de lugar k, denotado t_k, es

$$t_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1},$$

o quizás más fácil, el $(k+1)$-ésimo término es $t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Ejemplo 1.5.1. *Desarrolle* $(2a+b)^4$.

Solución.

$$\begin{aligned}
(2a+b)^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(2a)^{4-k}b^k \\
&= \binom{4}{0}(2a)^4+\binom{4}{1}(2a)^3b+\binom{4}{2}(2a)^2b^2+\binom{4}{3}(2a)b^3+\binom{4}{4}b^4 \\
&= 1\cdot 16a^4+4\cdot 8a^3\cdot b+6\cdot 4a^2\cdot b^2+4\cdot 2a\cdot b^3+1\cdot b^4 \\
&= 16a^4+32a^3b+24a^2b^2+8ab^3+b^4.
\end{aligned}$$

Observe que el coeficiente de ab^3 es 8.

Ejemplo 1.5.2. *En* $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{14}$ *determine*

a) el quinto término,

b) el(los) término(s) central(es).

Solución.

a) $t_5=\binom{14}{4}1^{10}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^4=1001\cdot\dfrac{x^8}{16}=\dfrac{1001}{16}x^8.$

b) Si el exponente del binomio es un número par, entonces existe un único término central, así, si n es par, entonces el término central es $t_{\frac{n}{2}+1}$; el término pedido es

$$\begin{aligned}
t_8 &= \binom{14}{7}1^7\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\
&= -\binom{14}{7}\frac{1}{2^7}x^{14}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.3. *Determine el coeficiente de* x^{18} *(si existe), en el desarrollo de* $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^{15}$.

Solución. Supongamos que $x^{18}\in t_{t+1}=\binom{15}{k}(x^2)^{15-k}\left(\frac{3}{x}\right)^k$, entonces

$$x^{18}\in\binom{15}{k}x^{30-2k}3^kx^{-k}=\binom{15}{k}3^kx^{30-3k}.$$

Esto nos indica que $x^{18}=x^{30-3k}$, de donde $30-3k=18$, así, $k=4$. Deducimos que el coeficiente de x^{18} es $\binom{15}{4}3^4$.

Ejemplo 1.5.4. *Determine el coeficiente de* x^{10} *(si existe), en* $(1+2x+3x^2)(1+x)^{12}$.

Solución.

$$(1+2x+3x^2)(1+x)^{12} = (1+x)^{12} + 2x(1+x)^{12} + 3x^2(1+x)^{12}$$

Como

$$(1+x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} 1^{12-k} x^k = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^k,$$

concluimos que el coeficiente de x^{10} es $\binom{12}{10}$; el coeficiente de x^9 es $\binom{12}{9}$ y que el coeficiente de x^8 es $\binom{12}{8}$, así, el coeficiente de x^{10} en el desarrollo de $(1+2x+3x^2)(1+x)^{12}$ es

$$\binom{12}{10} + 2\binom{12}{9} + 3\binom{12}{8} = 66 + 2\cdot 220 + 3\cdot 495 = 1991.$$

Ejemplo 1.5.5. *Determine el coeficiente de* x^6 *en* $(2+x+x^2)^{10}$, $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

Solución. Como

$$\begin{aligned}
(2+x+x^2)^{10} &= \left[(2+x)+x^2\right]^{10} \\
&= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (2+x)^{10-k} (x^2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \left[\sum_{p=0}^{10-k} \binom{10-k}{p} 2^{10-k-p} x^p\right] (x^2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{10} \sum_{p=0}^{10-k} \binom{10}{k} \binom{10-k}{p} 2^{10-k-p} x^{p+2k},
\end{aligned}$$

entonces se debe cumplir que $p+2k=6$. Las posibilidades son

$$(k=0 \wedge p=6) \vee (k=1 \wedge p=4) \vee (k=2 \wedge p=2) \vee (k=3 \wedge p=0),$$

así, el coeficiente de x^6 es

$$\begin{aligned}
&\binom{10}{0}\binom{10}{6} 2^{10-0-6} + \binom{10}{1}\binom{9}{4} 2^{10-1-4} + \binom{10}{2}\binom{8}{2} 2^{10-2-2} + \binom{10}{3}\binom{7}{0} 2^{10-3-0} \\
&= 1\cdot 210\cdot 16 + 10\cdot 126\cdot 32 + 45\cdot 28\cdot 64 + 120\cdot 1\cdot 128 = 139680.
\end{aligned}$$

1.5.2. Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1.1. Determine el sexto término en el desarrollo de $\left(\frac{1}{2}a - 3\right)^6$.

Ejercicio 1.2. Determine el sexto término en el desarrollo de $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)^8$.

Ejercicio 1.3. Determine el coeficiente de x^{18} (si existe) en el desarrollo de $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^{15}$.

Ejercicio 1.4. Calcule el coeficiente numérico del término central de $\left(3s-\frac{1}{9}t\right)^{8}$.

Ejercicio 1.5. ¿Es cierto que el coeficiente de x^{16} en $\left(x^2+2x\right)^{10}$ es 3.360?.

Ejercicio 1.6. Determine el coeficiente de x en $\left(9x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$.

Ejercicio 1.7. Determine el coeficiente de x^4 en $(1+x)(1-x)^n$.

Ejercicio 1.8. Determine el coeficiente de x^n en $\left(1-x+x^2\right)(1+x)^n$.

Ejercicio 1.9. Determine el coeficiente de x^5 en $\left(1+x+x^2\right)^{10}$.

Ejercicio 1.10. Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

Ejercicio 1.11. En $(3x+2)^{19}$ ¿existen dos términos consecutivos con coeficientes iguales?.

Ejercicio 1.12. Determine el coeficiente de x^5 en $\left(x^2+x+3\right)^7$.

Ejercicio 1.13. ¿Existe $n\in\mathbb{N}$ para que el cuarto término de $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ y $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ sean iguales?.

Ejercicio 1.14. En $\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$ determine

a) El(los) termino(s) central(es).

b) El coeficiente de x^0.

Ejercicio 1.15. En $\left(\frac{a^4}{b}+\frac{b^2}{a^7}\right)^{14}$ determine (si existen)

a) el séptimo término,

b) el coeficiente de ab.

Ejercicio 1.16. Determine $\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$. ¿Qué pasa si h es muy pequeño?.

Ejercicio 1.17. En el desarrollo de $(3x+2)^{19}$, ¿existirán dos términos consecutivos con coeficientes iguales?.

Ejercicio 1.18. Pruebe que los coeficientes de x^2 y x^3 en el desarrollo de $(x^2+2x+2)^n$ son, respectivamente $2^{n-1}n^2$ y $\frac{1}{3}n(n^2-1)2^{n-1}$.

Ejercicio 1.19. Determine el coeficiente de $\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ en el desarrollo de $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$.

Ejercicio 1.20. Determine el coeficiente de x^4, en el desarrollo de

a) $(1-x)(1+x)^5$.

b) $(1+x)(1-x)^n$.

Ejercicio 1.21. Considere $p, q \in \mathbb{R}^+$ tal que $p+q=1$ y $P(k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Demuestre que,

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(k) = np$.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-np)^2 P(k) = npq$.

1.6. EJERCICIOS DIVERSOS COMPLEMENTARIOS - NATURALES

Ejercicio 1.1. Calcule $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} [(k+1)-1] \cdot k! \\
&= \sum_{k=1}^{n} [(k+1) \cdot k! - k!] \\
&= \sum_{k=1}^{n} [(k+1)! - k!],
\end{aligned}$$

notamos que estamos en condición de aplicar la propiedad telescópica de las sumatorias, obtenemos $(n+1)! - 1!$, así,

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Ejercicio 1.2. Demuestre que $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ se cumple en todo $\mathbb{N}$.

Solución. Sea $P(n) : \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

Debemos demostrar: a) $P(1)$ es V y b) Si $P(r)$ es V entonces $P(r+1)$ es V.

a) $P(1)$ es verdadero ya que

$$\sum_{k=1}^{1} k\cdot k! = 1\cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1 = 2! - 1.$$

b) Si $P(r)$ es verdadero, es decir, si $\sum_{k=1}^{r} k\cdot k! = (r+1)! - 1$, debemos demostrar que $\sum_{k=1}^{r+1} k\cdot k! = (r+2)! - 1$. Veámoslo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{r+1} k\cdot k! = (r+2)! - 1 &= \sum_{k=1}^{r} k\cdot k! + \sum_{k=r+1}^{r+1} k\cdot k! \\ &= (r+1)! - 1 + (r+1)(r+1)! \\ &= (r+1)!(1+r+1) - 1 \\ &= (r+2)! - 1. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3. Calcule $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} e^k\right)$.

Solución.

$$\begin{aligned} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} e^k\right) &= \ln(e\cdot e^2\cdot e^3\cdots e^n) \\ &= \ln(e) + \ln(e^2) + \ln(e^3) + \cdots + \ln(e^n) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.4. Demuestre que $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ es divisible por 14 para todo natural n.

Solución. Sea $P(n) : 3^{4n+2} + 5^{2n+1} = 14r$ para algún $r \in \mathbb{Z}$.

a) $P(1)$ es verdadero ya que

$$3^{4\cdot 1+2} + 5^{2\cdot 1+1} = 3^6 + 5^3 = 729 + 125 = 854 = 14\cdot 61.$$

b) Si $P(k)$ es verdadero, es decir, si $3^{4k+2} + 5^{2k+1} = 14r$, para algún $r \in \mathbb{Z}$, debemos demostrar que $3^{4(k+1)+2} + 5^{2(k+1)+1} = 14s$, para algún $s \in \mathbb{Z}$. Veámoslo,

$$\begin{aligned} 3^{4(k+1)+2} + 5^{2(k+1)+1} &= 3^{4k+4+2} + 5^{2k+2+1} = 3^4\cdot 3^{4k+2} + 5^2\cdot 5^{2k+1} \\ &= 3^4\cdot 3^{4k+2} + 3^4\cdot 5^{2k+1} - 3^4\cdot 5^{2k+1} + 5^2\cdot 5^{2k+1} \\ &= 3^4(3^{4k+2} + 5^{2k+1}) - 56\cdot 5^{2k+1} \\ &= 3^4\cdot 14r - 14\cdot 4\cdot 5^{2k+1} \\ &= 14(3^4 r - 4\cdot 5^{2k+1}) \\ &= 14s, \end{aligned}$$

donde $s = 81r - 4\cdot 5^{2k+1} \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 1.5. Calcule

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\cdots+\frac{99}{100}\right).$$

Solución. Denotemos por S a la suma propuesta, entonces, en realidad es cuestión de escribir la suma propuesta con los símbolos ya estudiados, tenemos:

$$S=\sum_{k=2}^{100}\frac{\sum_{i=1}^{k-1} i}{k}=\sum_{k=2}^{100}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{k}=\sum_{k=2}^{100}\frac{(k-1)k}{2k}=\sum_{k=2}^{100}\frac{k-1}{2}=\sum_{k=1}^{99}\frac{k}{2}=\frac{99\cdot 98}{4}=2475.$$

Ejercicio 1.6. Calcule $\sum\limits_{k=1}^{20}\frac{2^k-1}{4^{k-1}}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{20}\frac{2^k-1}{4^{k-1}} &= \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{2^k}{4^{k-1}}-\frac{1}{4^{k-1}}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{2^k}{2^{2k-2}}-\frac{1}{4^{k-1}}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2^{k-2}}-\frac{1}{4^{k-1}}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{20}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}-\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

La primera sumatoria corresponde a la suma de los primeros 20 términos de una Progresión Geométrica con primer término con valor $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ y razón $\frac{1}{2}$ en tanto que la segunda sumatoria corresponde a la suma de los primeros 20 términos de una Progresión geométrica con primer término con valor 1 y razón $\frac{1}{4}$. Usted puede calcular estas sumas con aplicación de la fórmula

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1\frac{1-r^n}{1-r}.$$

1.7. EJERCICIOS PROPUESTOS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio 1.1. Calcule $\log\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{10^k}{100k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\log(k)$. Resp. $\frac{n(n+1)}{2}-2n-2\log(n!)$.

Ejercicio 1.2. Calcule $\sum_{k=1}^{100}\frac{3^k-1}{9^{k-1}}$. Indicación: Separe y llege a dos P.G.

Ejercicio 1.3. Demuestre que $\sum_{p=1}^{n}(p^2+1)p! = n(n+1)!$ se cumple para todo natural.

Ejercicio 1.4. Calcule $\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k}\right)$. Indicación: Sume y reste alguna expresión adecuada para usar la propiedad telescópica. Resp. $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-\sqrt{2}-1$.

Ejercicio 1.5. Calcule $\sum_{k=5}^{100}\left[\sqrt{k+2}-\left(\frac{3}{4}\right)^k-\sqrt{k+1}\right]$.

Ejercicio 1.6. Calcule $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$. Resp. $1-\frac{1}{(n+1)}!$.

Ejercicio 1.7. Muestre que la suma de los n primeros naturales más n^2 es igual a la suma de los siguientes n naturales. Resp. La suma común es $\frac{n(3n+1)}{2}$.

Ejercicio 1.8. Determine $x\in\mathbb{R}$ para que $x, x-6, x-8$ estén en Progresión Armónica. Resp. $x = 12$.

Ejercicio 1.9. Demuestre que

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n},\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

Ejercicio 1.10. Si

$$a_k=\begin{cases} k^2+2k+1 & 1\leq k\leq 25\\ \frac{2^{k-1}}{3^{2k+1}} & 26\leq k\leq 35\\ \frac{1}{(2k+5)(2k+7)} & 36\leq k\leq 50\end{cases}$$

determine $\sum_{k=1}^{50} a_k$.

Ejercicio 1.11. Demuestre que $\sum_{i=1}^{n}\binom{i+1}{2}=\binom{n+2}{3}$ se cumple para todo valor del natural n.

Ejercicio 1.12. Usando la propiedad telescópica determine una fórmula para las siguientes sumas

a) $\sum_{k=1}^{n} k2^k$. Resp. $(n-1)2^{n+1}+2$.

b) $\sum_{k=1}^{n} k3^{k-1}$. Resp. $\frac{(2n-1)3^n+1}{4}$.

Ejercicio 1.13. Demuestre que $\sum_{i=1}^{n} i2^i=(n-1)2^{n+1}+2$ se cumple para todo valor de n en los naturales.