RELACIONES Y FUNCIONES

1.1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

Definición 1.1.1. Sean A, B conjuntos, definimos el "par ordenado A coma B", denotado (A, B) como el conjunto $(A, B) = \{\{A\}, \{A, B\}\}$.

Observación 1.1.1. Al elemento A lo llamamos "primer elemento del par ordenado" o también "abscisa".

Al elemento B lo llamamos "segundo elemento del par ordenado" o también "ordenada".

Ejemplo 1.1.1. *Es evidente que* $(2, 3) = \{\{2\}, \{2, 3\}\} \neq (3, 2) = \{\{3\}, \{3, 2\}\}$.

Definición 1.1.2. Sean A, B conjuntos, definimos el producto cartesiano de A con B denotado por $A \times B$, como el conjunto tal que

$$A \times B = \{(a, b) \,/\, a \in A \wedge b \in B\}\,.$$

Ejemplo 1.1.2. *Si* $A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{3, 4\}$ *entonces*

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\} \\ B \times A &= \{(3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3)\}\,. \end{aligned}$$

Observación 1.1.2.

a) $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

b) En general $A \times B \neq B \times A$.

c) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)$.

d) $A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow (A \neq \emptyset) \wedge (B \neq \emptyset)$.

Definición 1.1.3. Sean A, B conjuntos, definimos una relación R de A a B como cualquier subconjunto de $A \times B$.

Observación 1.1.3. Nos interesan las relaciones que se determinan mediante cierta ley de formación, así, una relación R de A a B es

$$R \subseteq A \times B = \{(a,b) \,/\, p((a,b))\}$$

donde $p((a,b))$ es una fórmula proposicional dada.

Ejemplo 1.1.3. *Considere los conjuntos* $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, N*; determine por extensión las siguientes relaciones*

a) $R_1 \subseteq A \times B = \{(a,b) \,/\, a+b \text{ es un número par}\}$.

b) $R_2 \subseteq A \times B = \left\{(x,y) \,/\, x^2 + y^2 > 6\right\}$.

c) $R_3 \subseteq N \times N = \{(a,b) \,/\, a + 2b = 15\}$.

d) $R_4 = \left\{ (x,y) \,/\, \dfrac{\sqrt{\frac{2x+y}{3}}}{2} - 1 = 0 \right\}$.

Solución. Después de realizar $A \times B$ y $N \times N$ obtenemos

$$\begin{array}{rcl} R_1 & = & \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3)\} \\ R_2 & = & \{(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\} \\ R_3 & = & \{(1,7),(3,6),(5,5),(7,4),(9,3),(11,2),(13,1)\} \\ R_4 & = & \{(1,10),(2,8),(3,6),(4,4),(5,2)\}\,. \end{array}$$

1.2. DOMINIO, RECORRIDO Y RELACIÓN INVERSA

Definición 1.2.1. Sea $R \subseteq A \times B = \{(a,b) \,/\, p((a,b))\}$ una relación, definimos:

a) Dominio de la relación R, denotado $Dom(R)$, al conjunto tal que

$$Dom(R) = \{a \in A \,/\, \exists b \in B \text{ tal que } (a,b) \in R\}\,.$$

b) Recorrido de la relación R, denotado $Rec(R)$, al conjunto tal que

$$Rec(R) = \{b \in B \,/\, \exists a \in A \text{ tal que } (a,b) \in R\}\,.$$

c) Relación inversa de R, denotada R^{-1}, al conjunto tal que

$$R^{-1} \subseteq B \times A = \{(p,q) \,/\, (q,p) \in R\}\,.$$

Observación 1.2.1.

a) El dominio de una relación es el conjunto formado por las primeras componentes de los pares de la relación.

b) El recorrido de una relación es el conjunto formado por las segundas componentes de los pares de la relación.

c) La relación inversa de una relación R esta formada por los pares ordenados "recíprocos" de los pares ordenados de R.

Ejemplo 1.2.1. *En el ejemplo anterior*

$$Dom(R_1) = \{1,2,3\}\ , \quad R_2^{-1} = \{(3,1),(4,1),(2,2),(3,2),(4,2),(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}\,.$$

Proposición 1.2.1. $R \subseteq A \times B = \{(a,b)\,/\,p((a,b))\}$ *una relación, entonces:*

a) $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.

b) $Dom(R) \subseteq A, \quad Rec(R) \subseteq B$.

c) $Dom(R) = Rec\left(R^{-1}\right),\ Rec(R) = Dom\left(R^{-1}\right)$.

La demostración queda propuesta.

1.3. COMPOSICIÓN DE RELACIONES

Definición 1.3.1. Sean $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ dos relaciones, entonces existe la relación compuesta de R con S, denotada $S \circ R$ tal que

$$S \circ R \subseteq A \times C = \{(x,z)\,/\,\exists\, y \in B \text{ tal que } (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}\,.$$

Ejemplo 1.3.1. *Sean*

$$R \subseteq A \times B = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,c)\} \quad , \quad S \subseteq B \times C = \{(a,x),(a,y),(b,y)\}$$

dos relaciones con $A = \{1,2,3,4,5\}, \quad B = \{a,b,c,d,e\}, \quad C = \{x,y,z,w,p\}$, *entonces*

a) $S \circ R = \{(1,x),(1,y),(2,y)\}$.

b) $(S \circ R)^{-1} = \{(x,1),(y,1),(y,2)\}$.

c) $R^{-1} = \{(a,1),(b,2),(c,3),(c,4)\}$.

d) $S^{-1} = \{(x,a),(y,a),(y,b)\}$.

e) $R^{-1} \circ S^{-1} = \{(x,1),(y,1),(y,2)\}$.

Ejemplo 1.3.2. *Sean* $R \subseteq A \times B, \quad S \subseteq B \times C$ *dos relaciones. Demuestre que* $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Solución. Debemos demostrar:

a) $(S \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1} \circ S^{-1}$.

b) $R^{-1} \circ S^{-1} \subseteq (S \circ R)^{-1}$.

a) Sea $(x, y) \in (S \circ R)^{-1}$ debemos demostrar que $(x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}$.

$$\begin{aligned}(x, y) \in (S \circ R)^{-1} &\Rightarrow (y, x) \in S \circ R \\ &\Rightarrow \exists\, m \in B \text{ tal que } (y, m) \in R \wedge (m, x) \in S \\ &\Rightarrow \exists\, m \in B \text{ tal que } (x, m) \in S^{-1} \wedge (m, y) \in R^{-1} \\ &\Rightarrow (x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}.\end{aligned}$$

b) Sea $(a, b) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ debemos demostrar que $(a, b) \in (S \circ R)^{-1}$.

$$\begin{aligned}(a, b) \in R^{-1} \circ S^{-1} &\Rightarrow \exists\, n \in B \text{ tal que } (a, n) \in S^{-1} \wedge (n, b) \in R^{-1} \\ &\Rightarrow \exists\, n \in B \text{ tal que } (b, n) \in R \wedge (n, a) \in S \\ &\Rightarrow (b, a) \in S \circ R \\ &\Rightarrow (a, b) \in (S \circ R)^{-1}.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.3. *Sean A, B, C conjuntos y $T \subseteq A \times B$, $\quad S \subseteq B \times C$ dos relaciones. Demuestre que*

$$(R \cup S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cup (S \circ T) \quad \textit{donde} \quad R \subseteq B \times C.$$

Solución. Sea $(a, b) \in (R \cup S) \circ T$, debemos demostrar que $(a, b) \in (R \circ S) \cup (S \circ T)$.

$$\begin{aligned}(a, b) \in (R \cup S) \circ T &\Rightarrow \exists\, c \in B \text{ tal que } (a, c) \in T \wedge (c, b) \in R \cup S \\ &\Rightarrow (a, c) \in T \wedge ((c, b) \in R \vee (c, b) \in S) \\ &\Rightarrow ((a, c) \in T \wedge (c, b) \in R) \vee ((a, c) \in T \wedge (c, b) \in S) \\ &\Rightarrow (a, b) \in R \circ T \vee (a, b) \in S \circ T \\ &\Rightarrow (a, b) \in (R \circ T) \cup (S \circ T).\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.4. *Sea A un conjunto y considere las relaciones $R \subseteq A^2$ y $Id \subseteq A^2 = \{(x, y) \,/\, x = y\}$. Demuestre que $R \circ Id = R$.*

Solución. Debemos demostrar que: a) $R \circ Id \subseteq R$, $\quad$ b) $R \subseteq R \circ Id$.

a) Sea $(x, z) \in R \circ Id$, debemos demostrar que $(x, z) \in R$.

$(x, z) \in R \circ Id \Rightarrow \exists\, y \in A$ tal que $(x, y) \in Id \wedge (y, z) \in R$, pero $(x, y) \in Id$ indica que $x = y$, así, $(x, z) \in R$.

b) Sea $(x, z) \in R$, debemos demostrar que $(x, z) \in R \circ Id$.

Sea$(x, z) \in R$, como $(x, x) \in Id$ entonces $(x, x) \in Id \wedge (x, z) \in R$, de esto último concluimos que $(x, z) \in R \circ Id$.

1.4. RELACIONES EN UN CONJUNTO

Definición 1.4.1. Sea A un conjunto. Decimos que la relación R está definida en A si $R \subseteq A \times A$.

Definición 1.4.2. Sea R una relación definida en A, entonces:

a) R es relación refleja $\Leftrightarrow (a,a) \in R\ \forall\, a \in A$.

b) R es relación simétrica $\Leftrightarrow (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R\ \forall\,(x,y) \in R$.

c) R es relación transitiva $\Leftrightarrow [(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R] \Rightarrow (a,c) \in R\ \forall\,(x,y) \in R$.

d) R es relación antisimétrica $\Leftrightarrow [(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R] \Rightarrow (a=b)\ \forall\,(x,y) \in R$.

Observación 1.4.1.

a) Denotamos $R \subseteq A^2$ en lugar de $R \subseteq A \times A$.

b) Si $(a,b) \in R$ podemos denotar aRb.

c) R no es refleja $\Leftrightarrow \exists\, a \in A$ tal que $(a,a) \notin$ R.

d) R no es simétrica $\Leftrightarrow (a,b) \in R \wedge (b,a) \notin R$.

e) R no es transitiva $\Leftrightarrow (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \wedge (a,c) \notin R$.

f) R no es antisimétrica $\Leftrightarrow (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \wedge (a \neq b)$.

Ejemplo 1.4.1. *Sea* $A = \{1,2,3\}$ *y* $R \subseteq A^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),((1,3),(3,3)\}$. *¿Es R una relación refleja, simétrica, transitiva, antisimétrica?.*

Solución. Como $(a,a) \in R\ \forall\, a \in A$ entonces R es relación refleja.
R no es simétrica ya que $(1,3) \in R \wedge (3,1) \notin R$.
R es transitiva ya que se verifica la condición.
R no es antisimétrica ya que $(1,2) \in R \wedge (2,1) \in R$ pero $1 \neq 2$.

Ejemplo 1.4.2. *Sea R una relación en A. Demuestre que R es simétrica* $\Leftrightarrow R = R^{-1}$.

Solución.
$\Rightarrow$) Si R es simétrica debemos demostrar que $R = R^{-1}$, es decir, debemos demostrar que

a) $R \subseteq R^{-1}$.

Sea $(x,y) \in R$ entonces como R es simétrica concluimos que $(y,x) \in R$, así, por definición de relación inversa conseguimos $(x,y) \in R^{-1}$, luego $R \subseteq R^{-1}$.

b) $R^{-1} \subseteq R$.

Sea $(a,b) \in R^{-1}$ entonces $(b.a) \in R$ y como R es simétrica entonces $(a,b) \in R$; así, $R^{-1} \subseteq R$.

Por a) y b) $R = R^{-1}$.

$\Leftarrow$) Sabemos que $R = R^{-1}$, debemos demostrar que R es simétrica.

Sea $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R^{-1}$, como $R = R^{-1}$ entonces $(b, a) \in R$, así, R es simétrica.

1.5. RELACIÓN DE ORDEN Y DE EQUIVALENCIA

1.5.1. Relación de equivalencia

Definición 1.5.1. Decimos que la relación $R \subseteq A^2$ es una relación de equivalencia en A si y sólo si R es refleja, simétrica y transitiva.

Ejemplo 1.5.1. *En el conjunto de los números reales R definimos la relación S por: $aSb \Leftrightarrow \exists\, m \in Z$ tal que $a = b \cdot 3^{m+1}$. Demuestre que S es una relación de equivalencia.*

Solución. Debemos demostrar que: a) S es refleja, b) S es simétrica, c) S es transitiva.

a) Como S es refleja si y sólo si $aSa\ \forall\, a \in A$, es decir, si y sólo si $\exists\, m \in Z$ tal que $a = a \cdot 3^{m+1}$, entonces que la igualdad se verifica con $m = -1 \in Z$, concluimos que S es refleja.

b) Si aSb entonces existe $m \in Z$ tal que $a = b \cdot 3^{m+1}$. Debemos demostrar que bSa, es decir, debemos demostrar que existe $m_1 \in Z$ tal que $b = a \cdot 3^{m_1+1}$.

   Como $a = b \cdot 3^{m+1}$ entonces $b = a \cdot 3^{-m-1}$, de donde $b = a \cdot 3^{-(m+2)+1}$, si definimos $m_1 = -(m + 2) \in Z$ concluimos que bSa.

c) Si $aSb \wedge bSc$ entonces existen $m_1, m_2 \in Z$ tal que $a = b \cdot 3^{m_1+1} \wedge b = c \cdot 3^{m_2+1}$; queremos demostrar que aSc, es decir, debemos demostrar que existe $m_3 \in Z$ tal que $a = c \cdot 3^{m_3+1}$. Resulta natural reemplazar b en $a = b \cdot 3^{m_1+1}$ obteniendo $a = c \cdot 3^{m_2+1} \cdot 3^{m_1+1} = c \cdot 3^{(m_1+m_2+1)+1}$. El término m_3 buscado es $m_3 = m_1 + m_2 + 1 \in Z$.

Ejemplo 1.5.2. *Sea R una relación definida en N^2 tal que $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Demuestre que R es una relación de equivalencia.*

Solución. Debemos demostrar que

a) R es refleja, es decir, $(a, b)R(a, b)\ \forall\, (a, b) \in N^2$.

b) R es simétrica, es decir, $(a, b)R(c, d) \Rightarrow (c, d)R(a, b)$.

c) R es transitiva, es decir, $[(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f)] \Rightarrow (a, b)R(e, f)$.

a) $(a, b)R(a, b)\ \forall\, (a, b) \in N^2$ ya que $ab = ba$, luego, R es refleja.

b) Si $(a, b)R(c, d)$ entonces $ad = bc$, si escribimos la igualdad precedente como $cb = da$ concluimos que, $(c, d)R(a, b)$, así, R es simétrica.

c) Si $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f)$ entonces $(ad = bc) \wedge (cf = de)$, debemos demostrar que $(a,b)R(e,f)$, es decir, que $af = be$.

De la igualdad $ad = bc$, multiplicando por e obtenemos $ade = bce$, pero por hipótesis tenemos que $de = cf$, entonces, reemplazando de en $ade = bce$ obtenemos $acf = bce$ de donde, cancelando, concluimos que $af = be$.

Ejemplo 1.5.3. *Una relación R definida en A es circular si y sólo si $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow cRa$. Demuestre que R es de equivalencia si y solo si R es refleja y circular.*

Solución.
$\Rightarrow$) Si R es de equivalencia debemos demostrar que R es refleja y circular. Basta demostrar que R es circular ya que R es de equivalencia.

Sea $aRb \wedge bRc$ entonces, como R es de equivalencia, en particular es transitiva, así, $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$; como R es relación simétrica entonces, de la última expresión concluimos que cRa.

$\Leftarrow$) Si R es refleja y circular debemos demostrar que R es de equivalencia. Falta demostrar que R es simétrica y transitiva.

Sea aRb; como R es refleja entonces bRb, así tenemos, $aRb \wedge bRb$ de donde bRa; concluimos que R es simétrica.

Sea $aRb \wedge bRc$ entonces, como R es circular conseguimos que cRa de donde, aRc ya que R es simétrica, así, R es transitiva.

1.5.2. Clases de equivalencia

Definición 1.5.2. Sea R una relación de equivalencia definida en $A \neq \emptyset$.

Para todo $x \in A$ llamamos clase de equivalencia de x según R al conjunto C_x también denotado $\bar{x}$, formado por todos aquellos elementos relacionados con x, es decir

$$\bar{x} = \{y \in A \,/\, yRx\}.$$

Observación 1.5.1.

1. A la relación la podemos denotar por $\sim$.
2. Las clases de equivalencia son no vacías, es decir, $\bar{x} \neq \emptyset \; \forall x \in A$.
3. Si $a, b \in \bar{x}$ entonces $a \sim x \wedge b \sim x$ de donde $a \sim b$, es decir, todos los elementos de una clase de equivalencia son equivalentes entre si. Con esto podemos representar la clase de equivalencia por uno de sus elementos.
4. $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y$.

Definición 1.5.3. El conjunto de las clases de equivalencia según R se llama conjunto cuociente de A por R. Se denota A/R.

Proposición 1.5.1. *Sea R una relación de equivalencia definida en $A \neq \emptyset$, entonces A/R posee las siguientes propiedades*

a) $\forall\, \bar{x} \in A/R, \quad \bar{x} \neq \emptyset$.

b) $\bar{x} \in A/R \wedge \bar{y} \in A/R$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ *entonces* $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

c) $\bigcup\limits_{\bar{x} \in A/R} \bar{x} = A$.

Demostración.

b) Supongamos $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$, entonces existe $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$, así, $z \in \bar{x} \wedge z \in \bar{y}$; esto último nos indica que $zRx \wedge zRy$, luego, xRy, de donde $\bar{x} = \bar{y}$, esto constituye una contradicción (Observación 1.5.1, 3.) así, $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

c) $\forall\, x \in A$, $x \in \bar{x}$ luego $\{x\} \subseteq \bar{x} \subseteq A$, así,

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{\bar{x} \in A/R} \bar{x} \subseteq A.$$

$\square$

Ejemplo 1.5.4. *Sea $A = \{a, b, c\}$ y $R \subseteq A^2 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (b,c), (c,b)\}$ una relación de equivalencia. Determine*

a) *La clase de equivalencia de los elementos de A.*

b) *El conjunto cuociente.*

Solución.

a)

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \{x \in A \,/\, xRa\} = \{a\} \\ \bar{b} &= \{x \in A \,/\, xRb\} = \{b, c\} \\ \bar{c} &= \bar{b}. \end{aligned}$$

b) El conjunto cuociente es $A/R = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ y un sistema de representantes es $S = \{a, b\}$.

Ejemplo 1.5.5. *En Z definimos la relación de equivalencia R por $aRb \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b$. Determine*

a) *La clase de equivalencia de los elementos de Z.*

b) *El conjunto cuociente.*

Solución.

a)

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \{x \in Z \,/\, xR0\} = \left\{x \in Z \,/\, x^2 + x = 0\right\} = \{-1, 0\} = \overline{-1} \\
\bar{1} &= \{x \in Z \,/\, xR1\} = \left\{x \in Z \,/\, x^2 + x = 1^2 + 1\right\} \\
&= \left\{x \in Z \,/\, x^2 + x - 2 = 0\right\} = \{1, -2\} = \overline{-2} \\
\bar{2} &= \{x \in Z \,/\, xR2\} = \left\{x \in Z \,/\, x^2 + x = 2^2 + 2\right\} = \left\{x \in Z/x^2 + x - 6 = 0\right\} \\
&= \{2, -3\} = \overline{-3} \\
\bar{3} &= \overline{-4} \\
&\vdots \\
\bar{n} &= \{n, -(n+1)\} = \overline{-(n+1)}.
\end{aligned}$$

1.5.3. Relación de orden

Definición 1.5.4. Una relación R definida en el conjunto A es una relación de orden si y sólo si es refleja, transitiva y antisimétrica.

Ejemplo 1.5.6. *Son relaciones de orden las siguientes relaciones:*

1. *La relación $\leq$ definida en $\mathbb{R}$.*
2. *La relación $\subseteq$ en la familia de conjuntos $P(A) = \{X/X \subseteq A\}$, A un conjunto dado.*
3. *La relación R definida en N por $aRb \Leftrightarrow a$ divide a b, (se puede denotar por $a|b$).*

En efecto, como $aRb \Leftrightarrow \exists\, k \in N$ tal que $b = ka$ entonces:

R es refleja ya que $a|a$, esto último puesto que $a = 1 \cdot a$.

R es transitiva ya que si $a|b \wedge b|c$ entonces $\exists\, k_1 \in N$ tal que $b = k_1 a$ y $\exists\, k_2 \in N$ tal que $c = k_2 b$, así, reemplazando b en $c = k_2 b$ obtenemos $c = k_2 k_1 a$, esto indica que $a|c$ con $k_2 k_1 \in N$.

R es antisimétrica ya que si $a|b \wedge b|a$ entonces $\exists\, k_1 \in N$ tal que $b = k_1 a$ y $\exists\, k_2 \in N$ tal que $a = k_2 b$, reemplazando b en $a = k_2 b$ obtenemos $a = k_2 k_1 a$ de donde $k_2 k_1 = 1$, esto nos indica que $k_1 = k_2 = 1$ y entonces $a = b$.

Conjunto parcial y totalmente ordenado

En general, una relación de orden R definida en un conjunto A no permite ordenar totalmente los elementos de A ya que, dados $a, b \in A$ puede suceder que no se verifique aRb o bRa, en este caso la relación es de orden parcial.

Por ejemplo, la relación de orden anterior es de orden parcial ya que, por ejemplo, 2 no divide a 3.

Definición 1.5.5. Una relación de orden R definida en el conjunto A es de *orden total* si $a, b \in A$ entonces aRb o bRa.

Ejemplo 1.5.7. *En N definimos la relación T por $aTb \Leftrightarrow \exists\, n \in N$ tal que $a^n = b$.*

a) Demuestre que T es una relación de orden.

b) ¿Es T un orden total?.

Solución.

a) Para que T sea una relación de orden debe cumplir

i) aTa, $\forall\, a \in N$. Refleja.

ii) $[aTb \wedge bTc] \Rightarrow aTc$. Transitiva.

iii) $[aTb \wedge bTa] \Rightarrow a = b$. Antisimétrica.

i) aTa ya que $a^1 = a$, $1 \in N$.

ii) Si $aTb \wedge bTc$ entonces existen $n, m \in N$ tal que $a^n = b$ y $b^m = c$; debemos demostrar que existe $p \in N$ tal que $a^p = c$.
Reemplazando $b = a^n$ en $c = b^m$ obtenemos $c = (a^n)^m = a^{nm}$, con $p = nm \in N$ se cumple.

iii) Si $aTb \wedge bTa$ entonces existen $n, m \in N$ tal que $a^n = b$ y $b^m = a$, reemplazando $b = a^n$ en la segunda igualdad obtenemos $a^{nm} = a$ de donde $nm = 1$, así, $n = m$. Esto indica que $a = b$.

b) La relación T no es de orden total ya que, por ejemplo, 2 no esta relacionado con 3 (no existe $n \in N$ tal que $2^n = 3$).

Congruencia módulo m

Definición 1.5.6. Sea $m \in Z^+$; $a, b \in Z$ se dicen *congruentes módulo* m, lo que se denota $a \equiv b(mod\, m)$ si y sólo si $a - b$ es múltiplo de m, es decir

$$a \equiv b(mod\, m) \Leftrightarrow \exists\, p \in Z \text{ tal que } a - b = mp.$$

Observación 1.5.2.

1. La relación de congruencia en el conjunto de los enteros para un módulo fijo m es una relación de equivalencia.

2. Esta relación de equivalencia es compatible con la adición y multiplicación, es decir $a \equiv b(mod\, m) \wedge c \equiv d(mod\, m)$ entonces $a + c \equiv b + d(mod\, m)$ y además $ac \equiv bd(mod\, m)$.

3. $a \equiv b(mod\, m) \Leftrightarrow a - b = mp \in mZ = \{0, \pm m, \pm 2m, \pm 3m, \ldots\}$.

Ejemplo 1.5.8. *Es inmediato que* $4 \equiv 16(mod\, 3)$; $-5 \equiv 30(mod\, 7)$; $-8 \equiv -30(mod\, 11)$.

Enunciaremos el siguiente Algoritmo de Euclides sólo para demostrar los Teoremas que daremos a continuación.

Algoritmo de Euclides

Sean $m, n \in Z^+ \cup \{0\}$ entonces existen, de manera única, $q, r \in Z^+ \cup \{0\}$ tal que $n = qm + r$ donde $0 \leq r < m$.

Teorema 1.5.1. *Sea* $m \in Z^+$, *entonces cualquier* $n \in Z$ *es congruente módulo* m *a uno y sólo uno de los enteros* $0, 1, 2, 3, \ldots, m - 1$.

Demostración. Sea $n \in Z$, debemos demostrar que n no puede ser congruente módulo m a dos enteros $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}$.

Supongamos que $n \equiv a(mod\, m)$ y $n \equiv b(mod\, m)$, entonces $a \equiv b(mod\, m)$.

Si $a > b$ entonces $a - b > 0$ y $a - b \leq m - 1$ ya que $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}$, es decir, $0 < a - b < m - 1$ de esto concluimos que m no divide a $a - b$, así, a no es congruente módulo m con b(contradicción).

Consideremos ahora un n cualquiera donde $n = 0$, $n > 0$, $n < 0$.

Si $n = 0$ entonces $n \equiv 0(mod\, m)$.

Si $n > 0$ entonces existen únicos q, r tal que $n = qm+r$; $0 < r < m$, luego $0 < r \leq m-1$ de donde $n \equiv r(mod\, m)$.

Si $n < 0$ consideramos $n+km > 0$, para algún k (por ejemplo $k = -n+1$) y aplicamos la demostración del caso anterior. □

Ejemplo 1.5.9. $n \in Z$ *es congruente módulo 3 a uno y sólo uno de los enteros* $0, 1, 2$, *y para verificar basta con dividir por 3 (Algoritmo de Euclides), así, por ejemplo* $4589 \equiv 2(mod\, 3)$ *ya que* $4589 = 1529 \cdot 3 + 2$.

Definición 1.5.7. Se llama *clases residuales módulo* m a aquellas m clases que contienen todos los enteros que son congruentes módulo m a uno de los enteros $0, 1, 2, 3, \ldots, m - 1$.

Ejemplo 1.5.10. *Para* $m = 3$ *se tienen 3 clases residuales formadas por los enteros congruentes a* $0, 1, 2$ *respectivamente*

$$\ldots, -6, -3, \mathbf{0}, 3, 6, 9, 12, \ldots$$
$$\ldots, -5, -2, \mathbf{1}, 4, 7, 10, 13, \ldots$$
$$\ldots, -4, -1, \mathbf{2}, 5, 11, 14, \ldots$$

Teorema 1.5.2. *Dos enteros a, b son congruentes modulo m si y sólo si dan el mismo resto al dividirlos por m.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que al dividir b por m se obtiene $b = qm + r$, $r < m$.

Por hipótesis $a \equiv b(mod\, m)$ es decir, $a - b = mp$, de donde $a = b + mp$, reemplazando b obtenemos $a = qm + r + mp = (q + p)m + r$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $a = q_1 m + r$, $b = q_2 m + r$ entonces $a - b = (q_1 - q_2)m$, así, $a \equiv b(mod\, m)$. □

Observación 1.5.3. La relación de congruencia módulo m fijo determina una partición del conjunto $\mathbb{Z}$ en clases de equivalencia y el conjunto cuociente lo denotamos Z_m.

Ejemplo 1.5.11. *Determine las clases de equivalencia por la congruencia módulo 5.*

Solución.

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \{x \in Z \,/\, 0 \sim x\} = \{x \in Z \,/\, x - 0 = 5k\} = \{x \in Z \,/\, x = 5k,\ k \in Z\} \\
&= \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\} \\
\bar{1} &= \{x \in Z \,/\, 1 \sim x\} = \{x \in Z \,/\, x - 1 = 5k\} = \{x \in Z \,/\, x = 5k + 1,\ k \in Z\} \\
&= \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\} \\
\bar{2} &= \{x \in Z \,/\, 2 \sim x\} = \{x \in Z \,/\, x - 2 = 5k\} = \{x \in Z \,/\, x = 5k + 2,\ k \in Z\} \\
&= \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\} \\
\bar{3} &= \{x \in Z \,/\, 3 \sim x\} = \{x \in Z \,/\, x - 3 = 5k\} = \{x \in Z \,/\, x = 5k + 3,\ k \in Z\} \\
&= \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\} \\
\bar{4} &= \{x \in Z \,/\, 4 \sim x\} = \{x \in Z \,/\, x - 4 = 5k\} = \{x \in Z \,/\, x = 5k + 4,\ k \in Z\} \\
&= \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}
\end{aligned}$$

así, $Z_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Definición 1.5.8. Sean $\bar{a}, \bar{b} \in Z_m$, donde a, b son representantes cualesquiera de $\bar{a}, \bar{b}$ respectivamente, entonces $\bar{a} + \bar{b}$ es la clase residual módulo m que contiene a $a + b$ (esto se puede hacer con cualquier elemento de $\bar{a}, \bar{b}$).

Ejemplo 1.5.12. *Determine la tabla de doble entrada de $(Z_3, +)$.*

Solución. Z_3 posee los elementos $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ donde

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \{\ldots, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots\} \\
\bar{1} &= \{\ldots, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots\} \\
\bar{2} &= \{\ldots, -1, 2, 5, 8, 11, 114, \ldots\}
\end{aligned}$$

La tabla que obtenemos es

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

donde, para calcular $\bar{1}+\bar{2}$, sumamos, por ejemplo, $1+2=3$ y como $3 \equiv 0(mod\, 3)$ entonces $\bar{1}+\bar{2}=\bar{0}$.

1.6. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1.1. Sean A, B, C conjuntos cualesquiera. Demuestre

a) $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

b) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset)$.

c) $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C,\ \forall\, C$.

d) $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$.

e) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Ejercicio 1.2. Considere las siguientes relaciones

$$\begin{array}{rcl} R_1 & = & \left\{(a,b) \in A^2 \,/\, a = b\right\} \text{ con } A = \{1,2,3\} \\ R_2 & = & \left\{(x,y) \in N^2 \,/\, 2x + y = 9\right\} \\ R_3 & = & \left\{(a,b) \in A^2 \,/\, a \text{ divide a } b\right\} \text{ si } A = \{1,2,3,4,5\} \\ R_4 & = & \left\{(x,y) \in A^2 \,/\, xy \geq 0\right\} \text{ si } A = \{-2,-1,0,1,2,3\} \\ R_5 & = & \left\{(a,b) \in A^2 \,/\, a^2 + b^2 > 3\right\} \text{ si } A = \{-1,0,1,2,3\} \end{array}$$

a) Determine por extensión la relación R_i, $i = 1,2,3,4,5$.

b) Determine $Dom(R_i)$, $Rec(R_i)$.

c) Determine por extensión R_i^{-1}.

Ejercicio 1.3. Sea $R \subseteq A \times B = \{(x,y) \,/\, p(x,y)\}$ una relación. Demuestre que

a) $Dom(R) \subseteq A, \quad Rec(R) \subseteq B$.

b) $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.

c) $Dom\left(R^{-1}\right) = Rec(R), \quad Rec\left(R^{-1}\right) = Dom(R)$.

Ejercicio 1.4. Considere las relaciones $R \subseteq A \times B,\ S \subseteq B \times C$. Demuestre que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Ejercicio 1.5. Sean las relaciones definidas en $\mathbb{R}$,

$$R = \{(x, y) \,/\, y = 2x\} \quad , \quad S = \left\{(x, y) \,/\, y = 2x^3\right\}.$$

Determine

a) $S \circ R$.

b) $R \circ S$.

Ejercicio 1.6. Considere las siguientes relaciones definidas en Z

$$\begin{aligned} R_1 &= \left\{(a, b) \,/\, a = b^2\right\} \\ R_2 &= \left\{(a, b) \,/\, a + a^2 = b + b^2\right\} \\ R_3 &= \{(x, y) \,/\, x - y \text{ es multiplo de } 3\} \\ R_4 &= \{(a, b) \,/\, \exists\, m \in Z \text{ tal que } a = mb\} \\ R_5 &= \{(a, b) \,/\, \exists\, k \in Z \text{ tal que } a - b = 2k\} \end{aligned}$$

Determine cuales de las relaciones planteadas son: reflejas, simétricas, antisimétricas, transitivas.

Ejercicio 1.7. Si R es una relación en A tal que R es transitiva demuestre que R^{-1} también es transitiva.

Ejercicio 1.8. Sea $R \subseteq A^2$. Demuestre que R es simétrica $\Leftrightarrow R^{-1} = R$.

Ejercicio 1.9. Sea R una relación en A. Demuestre que R es refleja $\Leftrightarrow D \subseteq R \wedge D = \{(a, a) \,/\, a \in A\}$.

Ejercicio 1.10. Demuestre que las siguientes relaciones definidas son relaciones de equivalencia,

$R_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $aR_1b \Leftrightarrow \exists\, k \in Z$ tal que $a - b = 2k$.

R_2 definida en $\mathbb{Q}^+$ tal que $aR_2b \Leftrightarrow \exists\, n \in Z$ tal que $a - b = 4n$.

Ejercicio 1.11. En Z definimos la relación R tal que $aRb \Leftrightarrow \exists\, n \in N \cup \{0\}$ tal que $b - a = n$. Demuestre que R es una relación de orden. ¿Es R un orden total?. Justifique.

Ejercicio 1.12. En N definimos la relación T tal que $aTb \Leftrightarrow \exists\, n \in N$ tal que $a^n = b$. Demuestre que R es una relación de orden. ¿Es R un orden total?. Justifique.

Ejercicio 1.13. En la familia de conjuntos Λ definimos la relación $\subseteq$.

a) Demuestre que R es una relación de orden.

b) ¿Es R un orden total?. Justifique.

c) Si $\Lambda = \{X/X \subseteq A\}$ con $A = \{1, 2, 3, 4\}$, verifique lo demostrado en a) y b).

Ejercicio 1.14. Si R es una relación de orden en A y S es una relación de orden en B demuestre que la relación T definida en $A \times B$ tal que $(a, b)T(c, d) \Leftrightarrow aRc \wedge bSd$ es de orden.

Ejercicio 1.15. Sean $R_1 \subseteq A^2$, $R_2 \subseteq B^2$ relaciones de orden y R_3 una relación definida en $A \times B$ tal que $(a, b)R_3(c, d) \Leftrightarrow aR_1c \wedge bR_2d$. Demuestre que R_3 es relación de orden.

Ejercicio 1.16. Sea R una relación en A. Decimos que R es conexa $\Leftrightarrow \forall\, x, y \in A$: $aRb \vee bRa$. Demuestre que si R es simétrica, transitiva y conexa entonces R es relación de equivalencia.

Ejercicio 1.17. Sea $\bar{x}$ la clase de equivalencia de x según R, donde R es la relación de equivalencia (también denotada $\sim$) definida en el conjunto $A \neq \emptyset$. Demuestre que

a) $\bar{x} \neq \emptyset$, $\forall\, \bar{x}$.

b) Todos los elementos de una clase de equivalencia R son equivalentes R entre si.

c) $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y$.

Ejercicio 1.18. Sea A/R el conjunto cuociente de A por R donde, R es una relación de equivalencia definida en el conjunto $A \neq \emptyset$. Demuestre que

a) $\forall\, \bar{x} \in A/R, \quad \bar{x} \neq \emptyset$.

b) $\bar{x} \in A/R \wedge \bar{y} \in A/R$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ entonces $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

c) $\displaystyle\bigcup_{\bar{x} \in A/R} = A$.

Ejercicio 1.19. Sea $m \in Z^+$; $a, b \in Z$ se dicen *congruentes modulo* m lo que denotamos $a \equiv b(mod\, m)$ o simplemente $a \equiv b(m)$ si y sólo si $a - b$ es múltiplo de m, es decir

$$a \equiv b(m) \Leftrightarrow \exists\, p \in Z \text{ tal que } a - b = pm.$$

Demuestre que la relación de congruencia definida en los números enteros para un módulo m fijo es una relación de equivalencia.

Ejercicio 1.20. Determine Z_3, la clase de equivalencia por la congruencia módulo 3.

Ejercicio 1.21. Sea $A = \{a, b, c\}$ y $R \subseteq A^2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}$.

a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.

b) Determine $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

c) Determine A/R.

1.7. FUNCIONES

Uno de los más importantes conceptos en Matemática se refiere a un tipo particular de relación entre elementos de dos conjuntos; las funciones.

Una función expresa la idea de una cantidad que depende de otra u otras cantidades, por ejemplo podemos afirmar que el área de un cuadrado depende o es función de la longitud del lado de éste; si al área lo denotamos por A y la longitud del lado lo denotamos por l entonces podemos escribir $A = f(l)$, y en éste caso particular, la expresión matemática es $A(l) = l^2$; el volumen V de un cilindro recto depende, es función, del radio basal r y de altura h, lo que escribimos $V = f(r, h)$ y la expresión matemática es $V(r, h) = \pi r^2 h$.

En matemática designamos a la variable independiente por x o por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a las eventuales variables independientes que explican el comportamiento de la variable dependiente y, escribiendo $y = f(x)$ o $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ respectivamente.

En la presente sección estudiaremos funciones con una única variable independiente, la función inversa y composición de funciones.

1.7.1. Definición de función

Una función f definida en el conjunto A con imágen en el conjunto B es toda relación $f \subseteq A \times B$ tal que a cada elemento x de A le hace corresponder un único elemento y del conjunto B.

Observación 1.7.1.

1. $f \subseteq A \times B$ es una función de A a B si y sólo si $\forall\, x \in A\, \exists! y \in B$ tal que $y = f(x)$.
2. $f \subseteq A \times B$ es función

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Dom(f) = A \\ [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f] \Rightarrow y = z \end{cases}$$

3. También se puede denotar a la función f por $f : A \to B$ tal que $y = f(x)$ o por $f : A \to B$.
4. $y = f(x)$ se lee "y es la imagen de x por f".

5. $y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in f$.

Ejemplo 1.7.1. *Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f, g\}$ entonces las siguientes relaciones de A a B son funciones de A a B*

$$f_1 = \{(a, d), (b, e), (c, f)\} \quad , \quad f_2 = \{(a, d), (b, d), (c, d)\} \,.$$

Ejemplo 1.7.2. *Sea $f \subseteq A \times \mathbb{R} = \big\{(2, 5a + 2), (4, a), (4, 2a + 1), (7, 2a^2 - 1)\big\}$ una relación donde $A = \{2, 4, 7\}$. Determine $a \in \mathbb{R}$ para que f sea función.*

Solución. Para que f sea función, el elemento 4 debe tener una única imagen, así se debe cumplir que $a = 2a + 1$, es decir, $a = -1$.

La función es $f = \{(2, -3), (4, -1), (7, 1)\}$.

Ejemplo 1.7.3. *Demuestre que la relación $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,/\, 2x + 3y = 6\}$ es una función.*

Solución.

Debemos demostrar

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Como $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists\, y \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}$ basta con demostrar que $\mathbb{R} \subseteq Dom(f)$.

Sea $x \in \mathbb{R}$, debemos demostrar que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$; tal y podemos despejarlo de $2x + 3y = 6$, obtenemos $y = f(x) = \frac{6-2x}{3} \in \mathbb{R}$ (ya que $x \in \mathbb{R}$).

b) $[(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f] \Rightarrow y = z$.

Si $[(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f]$ entonces $(2x + 3y = 6) \wedge (2x + 3z = 6)$, es decir $2x + 3y = 2x + 3z$, de donde $y = z$.

Ejemplo 1.7.4. *Sea $f \subseteq A \times \mathbb{R} = \left\{(x, y) \,/\, y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}\right\}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ una función. Determine el conjunto más grande que sirve como dominio A y como recorrido.*

Solución.

Como $Dom(f) = \{x \in A \,/\, \exists\, y \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) \subseteq \mathbb{R}\}$ y $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ entonces $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

Como $Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, \exists\, x \in \mathbb{R} - \{2\}$ tal que $y = f(x)\}$, despejando x de $y = \frac{x+1}{x-2}$ obtenemos $y(x - 2) = x + 1$, es decir, $yx - x = 1 - 2y$, esto indica que $x(y - 1) = 1 - 2y$ de tal manera que $x = \frac{1-2y}{y-1} \in \mathbb{R}$ si $y \neq 1$, así entonces, el máximo recorrido de f es $Rec(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

1.7.2. Operaciones con funciones

Definición 1.7.1. Sean f, g dos funciones tal que $Dom(f)$, $Dom(g)$ son sus respectivos dominios, entonces definimos las función suma, denotada $f + g$, tal que

i) $Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

ii) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Observación 1.7.2.

1. De manera más simplificada definimos la suma de las funciones f, g por

$$f + g = \{(x, f(x) + g(x)) \,/\, x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}.$$

2. Análogamente definimos las siguientes funciones

$$\begin{aligned}
&f - g = \{(x, f(x) - g(x)) \,/\, x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}; \text{ Función Diferencia.}\\
&f \cdot g = \{(x, f(x) \cdot g(x)) \,/\, x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}; \text{ Función Producto.}\\
&f^n = \{(x, f^n(x)) \,/\, x \in Dom(f)\}, \ n \in N; \text{ Función Potencia.}\\
&cf = \{(x, cf(x)) \,/\, x \in Dom(f)\}, \ c = C^{te}; \text{ Función Ponderada.}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.7.5. *Considere las funciones*

$$f = \{(1,3), (2,6), (4,8), (6,2)\} \quad , \quad g = \{(0,1), (1,2), (2,-1), (4,5), (7,0)\}.$$

Como $Dom(f) = \{1, 2, 4, 6\}$*,* $Dom(g) = \{0, 1, 2, 4, 7\}$ *entonces* $Dom(f) \cap Dom(g) = \{1, 2, 4\}$*, de donde*

$$\begin{aligned}
f + g &= \{(1,5), (2,5), (4,13)\}\\
f \cdot g &= \{(1,6), (2,-6), (4,40)\}.
\end{aligned}$$

1.7.3. Función Inversa

Función Inyectiva

Definición 1.7.2. Decimos que la función $f : A \to B$ es inyectiva o uno a uno si y sólo si

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \ \forall\, x_1, x_2 \in A.$$

Observación 1.7.3. Usando la "contrapositiva" tenemos que la función

$$f : A \to B \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2], \ \forall\, x_1, x_2 \in A.$$

Ejemplo 1.7.6. *Considere la función* $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ *tal que* $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$*, demuestre que* f *es inyectiva.*

Solución.
Debemos demostrar que $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R} - \{1\}$.
$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{2a+3}{a-1} = \frac{2b+3}{b-1} \Rightarrow (2a+3)(b-1) = (2b+3)(a-1)$, con un poco de trabajo algebraico concluimos que $a = b$.

Ejemplo 1.7.7. *Demuestre que la función* $f : (-\infty, -1) \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 1 - \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ *es inyectiva.*

Solución.
Para que lo sea se debe cumplir que $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b,\ \forall\, a, b \in (-\infty, -1)$.
Como $f(x) = 1 - \sqrt{x^2 - 4x - 5} = 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 4 - 9} = 1 - \sqrt{(x-2)^2 - 9}$ entonces $f(a) = f(b) \Rightarrow 1 - \sqrt{(a-2)^2 - 9} = 1 - \sqrt{(b-2)^2 - 9}$, así, cancelando el 1 y elevando al cuadrado (note que la cantidad subradical es no negativa) obtenemos $(a-2)^2 - 9 = (b-2)^2 - 9$, es decir, $(a-2)^2 = (b-2)^2$; al extraer raíz cuadrada conseguimos $|a-2| = |b-2|$ de donde $2 - a = 2 - b$ y finalmente $a = b$.

Conjunto Imagen

Definición 1.7.3. Sea $f : A \to B$ una función, y $E \subseteq A$, definimos la imagen de E por f, denotada $f(E)$ como el conjunto tal que $f(E) = \{y \in B \,/\, \exists\, x \in E \text{ tal que } y = f(x)\}$.

Ejemplo 1.7.8. *Considere la función* $f : [-5, \infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \sqrt{x+5}$*. Determine* $f(E)$ *si* $E = (-1, 20]$*.*

Solución.
Debemos determinar todos los valores de $y = f(x) = \sqrt{x+5}$ tal que $x \in (-1, 20]$. Si $x \in (-1, 20]$ entonces $-1 < x \leq 20$, de aquí, $4 < x + 5 \leq 25$ de tal manera que, al extraer raíz cuadrada obtenemos $2 < \sqrt{x+5} \leq 5$, finalmente

$$f(E) = \{f(x) \,/\, x \in E\} = (2, 5] \subseteq \mathbb{R}.$$

El problema anterior también se puede solucionar de la siguiente manera; como lo que deseamos es determinar el conjunto que valores que toma $y = f(x) = \sqrt{x+5}$ cuando $x \in (-1, 20]$, entonces podemos despejar x, obteniendo $x = y^2 - 5$. Imponiendo la condición conseguimos $-1 < y^2 - 5 \leq 20$ así, $4 < y^2 \leq 25$ de donde $2 < y \leq 5$.

Función Sobreyectiva

Definición 1.7.4. Decimos que la función $f : A \to B$ es sobreyectiva si y sólo $\forall\, y \in B\, \exists\, x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Observación 1.7.4. 1. La función $f : A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si "todos los elementos del conjunto B son imagen de algún elemento de A".

2. La función $f : A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si $Rec(f) = B$.

Ejemplo 1.7.9. *Demuestre que la función* $f : [0, 2) \to (-\infty, 0]$ *tal que* $f(x) = \frac{x}{x-2}$ *es sobreyectiva.*

Solución.

Debemos verificar que $Rec(f) = (-\infty, 0]$, despejemos x de $y = \frac{x}{x-2}$; tenemos:

$$y = \frac{x}{x-2} \Rightarrow xy - 2y = x \Rightarrow x = \frac{2y}{y-1},\ y \neq 1;$$

como $x \in [0, 2)$ entonces $0 \leq \frac{2y}{y-1} < 2$.

La solución de esta inecuación es $(-\infty, 0]$, así $Rec(f) = (-\infty, 0]$.

Ejemplo 1.7.10. *Si la función* $f : \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = |x - 2| - x$ *es sobreyectiva, determine el conjunto* B.

Solución.

Observe que $x \in \mathbb{R}$ y que la función involucra a $|x - 2|$, esto nos sugiere considerar dos casos: a) $x < 2$, b) $x \geq 2$.

a) $x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow |x - 2| = 2 - x$, así $f(x) = |x - 2| - x = 2 - 2x > -2$ ya que $x < 2 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow -2x > -4 \Rightarrow 2 - 2x > -2$, de donde $f(x) \in (-2, \infty)$.

b) $x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$, así $f(x) = |x - 2| - x = x - 2 - x = -2 \in \{-2\}$.

Por a) y b) $Rec(f) = \{f(x) \,/\, x \in \mathbb{R}\} = (-2, \infty) \cup \{-2\} = [-2, \infty) = B$.

Función Inversa, Teoremas

Función inversa

Si $f \subseteq A \times B$ es una relación, sabemos que existe la relación inversa $f^{-1} \subseteq B \times A$; cuando $f \subseteq A \times B$ es función, no estamos seguros de que $f^{-1} \subseteq B \times A$ sea también una función, el siguiente teorema regula la situación planteada, nos indica que la función f debe ser inyectiva y sobreyectiva, es decir, debe ser biyectiva.

Teorema 1.7.1. *Sea* $f : A \to B$ *tal que* $y = f(x)$ *una función, entonces* $f^{-1} : B \to A$ *es función* $\Leftrightarrow$ $f : A \to B$ *es biyectiva.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Debemos demostrar: a) $Dom\left(f^{-1}\right) = B$, b) $\left[(a, b) \in f^{-1} \wedge (a, c) \in f^{-1}\right] \Rightarrow b = c$.

a) $Dom\left(f^{-1}\right) = Rec(f) = B$ ya que f es sobreyectiva.

b) $\left[(a, b) \in f^{-1} \wedge (a, c) \in f^{-1}\right] \Rightarrow [(b.a) \in f \wedge (c, a) \in f] \Rightarrow [f(b) = a \wedge f(c) = a] \Rightarrow f(b) = f(c) \Rightarrow b = c$ ya que f es inyectiva.

$\Rightarrow$) Queda propuesta. $\square$

Observación 1.7.5. Dada la función biyectiva $f : A \to B$ tal que $y = f(x)$, nos debe interesar determinar la expresión funcional de la función inversa, es decir, determinar $f^{-1}(x)$, tenemos

$$y = f(x) \Rightarrow (x, y) \in f \Rightarrow (y, x) \in f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Es decir, despejamos x de $y = f(x)$ y en ésta última expresión reemplazamos y por x.

Ejemplo 1.7.11. *Considere la función biyectiva* $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ *tal que* $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$*, determine* $f^{-1}(x)$*.*

Solución. De $f(x) = y = \frac{2x+3}{x-1}$ tenemos $yx - y = 2x + 3$ de donde $x = \frac{y+3}{y-2}$, así entonces $x = f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-2}$ de donde, $f^{-1} : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$.

Ejemplo 1.7.12. *Considere la función* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 3x^2 + 6$, $x \leq 0$*. Determine la función inversa de* f*.*

Solución. Para que exista f^{-1}, la función f debe ser biyectiva. f es inyectiva ya que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1^2 + 6 = 3x_2^2 + 6 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$, extrayendo raíz cuadrada obtenemos $|x_1| = |x_2|$, así, $-x_1 = -x_2$ de donde $-x_1 = -x_2$.

Ahora debemos determinar $Rec(f)$ de tal manera que $f^{-1} : Rec(f) \to \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ sea función.

Si $x \leq 0$ entonces $x^2 \geq 0$ así $y = f(x) = 3x^2 + 6 \geq 6$, concluimos que $Rec(f) = [6, \infty)$ y $f^{-1} : [6, \infty) \to \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ es función.

Determinemos, finalmente, $f^{-1}(x)$.

De $y = 3x^2 + 6$ obtenemos $x^2 = \frac{y-6}{3}$ de donde $x = -\sqrt{\frac{y-6}{3}}$, entonces $f^{-1} : [6, \infty) \to \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ tal que $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x-6}{3}}$.

1.7.4. Composición de funciones

Definición 1.7.5. Sean f, g dos funciones tal que $Dom(f)$, $Dom(g)$ son sus respectivos dominios entonces definimos las función compuesta de f con g, denotada $f \circ g$, a aquella tal que

1. $Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) \,/\, g(x) \in Dom(f)\} = Dom(g) \cap \{x \,/\, g(x) \in Dom(f)\}$.
2. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Observación 1.7.6. Podemos denotar, más simple $f \circ g = \{(x, f(g(x))) \,/\, x \in Dom(f \circ g)\}$.

Ejemplo 1.7.13. *Considere las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2$*,* $g = \{(4, 2), (9, 1)\}$*. Determine* $g \circ f$*.*

Solución. En primer lugar determinemos $Dom(g \circ f)$.

$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) \,/\, f(x) \in Dom(g)\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \in \{4, 9\}\right\}$, así, $x^2 = 4$ indica que $x = \pm 2$ y $x^2 = 9$ indica que $x = \pm 3$, es decir, $Dom(g \circ f) = \{-3, -2, 2, 3\}$.

Ahora, como $g \circ f = \{(x, g(f(x))) \,/\, x \in \{-3, -2, 2, 3\}\}$ entonces

$$g \circ f = \{(-3, 1), (-2, 2), (2, 2), (3, 1)\}\,.$$

Ejemplo 1.7.14. *Considere las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+1) = 2x+5$, $g(x) = 3x - 2$. Determine $(f \circ g)(x)$.*

Solución. Si $x + 1 = p$ entonces $x = p - 1$ de donde, la expresión $f(x + 1) = 2x + 5$ se convierte en $f(p) = 2(p - 1) + 5 = 2p + 3$, es decir $f(x) = 2x + 3$.

Por otro lado $Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) \,/\, g(x) \in Dom(f)\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 3x - 2 \in \mathbb{R}\}$ así, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 2) = 2(3x - 2) + 3 = 6x - 1$.

Ejemplo 1.7.15. *Considere las funciones f, g tal que $f(x) = x^2$; $g(x) = ax+1$, $a > 0$ con dominio real apropiado para que ambas sean biyectivas. Si $(f^{-1} \circ g^{-1})(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$, determine $(g \circ f)(-2)$.*

Solución. Como $y = f(x) = x^2$ entonces $x = \sqrt{y}$ de donde $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Como $y = g(x) = ax + 1$ entonces $x = \frac{y-1}{a}$ de donde $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{a}$.

Imponiendo la condición tenemos

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right) = f^{-1}\left(g^{-1}\left(\tfrac{3}{2}\right)\right) = f^{-1}\left(\tfrac{1}{2a}\right) = \sqrt{\frac{1}{2a}} = \frac{1}{2},$$

de donde el valor de a es $a = 2$, así, $g(x) = 2x + 1$.

Finalmente, $(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(4) = 9$.

1.8. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1.1. Sean

$$A = \{1, 2, 3\}\ ,\quad B = \{3, 4, 5\}\ ,\quad f = \{(1, 3), (2, 4), (a, b)\}\ ,\quad g = \{(3, 3), (2, 4)(c, d)\}\,,$$

funciones de A a B. Si $f(x) \neq x$, $\forall\, x \in A$, $Rec(f) \neq B$, $g(1) = 3$, determine el valor de $(b - a) + (c - d)$.

Resp. -1.

Ejercicio 1.2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ -1 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) $f(2x)+f(3y)=0 \Rightarrow x$ es par $\wedge\, y$ es impar .

b) $f(x)f(y)=-2,\ \forall\, x,y\in\mathbb{N}$.

c) Existe un único natural n tal que $f(nx)=nf(x)$.

Resp. c.

Ejercicio 1.3. Determine $a,b\in\mathbb{R}$ para que

$$f=\big\{(1,8),(2,-3),(1,a^2+b^2),(-1,a+b),(a^2+b,a),(b+a^2,b)\big\}$$

sea función.

Resp. $(a=2\wedge b=2)\vee(a=-2\wedge b=-2)$.

Ejercicio 1.4. Sea $A=\{p\,/\,p$ es una proposición$\}$. Definimos una función $f:A\to\mathbb{R}$ por

$$f(p)=\begin{cases}1 & \text{si } p \text{ es V}\\ 0 & \text{si } p \text{ es F}\end{cases}$$

Demuestre

a) $f(p\vee q)=f(p)+f(q)-f(p)f(q)$.

b) $f(\sim p)=1-f(p)$.

c) $f(\sim p\vee q)=1-f(p)f(\sim q)=1-f(p)+f(p)f(q)$.

Ejercicio 1.5. Considere las funciones reales f, g tal que $f(x)=x^2+2x$, $g(x+1)=x^2$. Determine $f((x-1)^2)-6g(x)$.

Resp. $(x-1)^2(x-3)(x+1)$.

Ejercicio 1.6. Sean f, g funciones reales definidas por $f(x)=ax+b$, $g(x)=cx+d$; $a,b,c,d\in\mathbb{R}$; $a,b\neq 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $f(x+y)=f(x)+f(y)\Leftrightarrow b=0$.

b) $(fg)(x)=x^2+(b+d)x+bd\Leftrightarrow \frac{a}{c}=1$.

c) $(f+g)(x)=b+d\Leftrightarrow a=-c$.

d) $f(g(x))=acx+ad$.

Resp. a) y c).

Ejercicio 1.7. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Si $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$ y si $f(-2)=-6$, determine a y b.

Resp. $a = 3$, $b = 0$.

Ejercicio 1.8. Sea $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = x^2 - 3$. Demuestre que f es inyectiva.

Ejercicio 1.9. Considere las funciones reales f, g tal que $f(x+1) = ax + b$, $g(x) = x - b$, $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Si $f \circ g = g \circ f$, determine el valor de $b(a-1)$.

Resp. 0.

Ejercicio 1.10. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x+7) = f(x) + f(7)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ y $f(0) = 0$. Verifique que

a) $f(-7) = -f(7)$.

b) $f(35) = f(14) + 3f(7)$.

c) $\frac{f(63)}{f(7)} = 9$ si $f(7) \neq 0$.

Ejercicio 1.11. Sean f, g funciones reales definidas por $f(x) = \sqrt{x+4}$, $x \in [0, 6]$; $g(x) = x^2 + 2$, $x \in [-1, 3]$, determine las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

Resp. $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 6}$, $x \in [-1, 2]$; $\quad (g \circ f)(x) = x + 6$, $x \in [0, 5]$.

Ejercicio 1.12. Sean f, g funciones reales definidas por $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $x \geq 3$; $g(x) = \frac{2x+1}{x}$, $x \geq \frac{1}{2}$. Determine $f \circ g$ y $g \circ f$.

Resp. $(f \circ g)(x) = x$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\quad (g \circ f)(x) = x$, $x \in [3, 4]$.

Ejercicio 1.13. Sean f, g funciones reales tales que $f(x) = x^2$, $x < 0$; determine $g(x)$ si $f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 9$.

Resp. $g(x) = -|2x - 3|$

Ejercicio 1.14. Sean f, g funciones reales tales que $f(x-2) = x^2 + x + 1$, $g(x-a) = x$. Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que $(f \circ g)(2) = (g \circ f)(a-2)$.

Resp. $a = -\frac{20}{7}$.

Ejercicio 1.15. Si $f : X \to Y$ es función, $A, B \subseteq Y$ demuestre que

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

d) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

e) $f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$.

f) $f^{-1}(B^C)=(f^{-1}(B))^C$.

g) $A\subseteq B\Rightarrow f^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(B)$.

h) $f(f^{-1}(B))\subseteq B \quad \forall B\subseteq Y$.

i) $f^{-1}(f(B))\subseteq B \quad \forall B\subseteq X$.

Ejercicio 1.16. Hallar $a,b\in\mathbb{R}$ para que la función $f:[b,-2]\to\left[a,-\frac{1}{24}\right]$ sea biyectiva, donde $f(x)=\frac{1}{6x+6}$.

Resp. $a=-\frac{1}{6}$, $b=-5$.

Ejercicio 1.17. Si $f:A\subseteq\mathbb{R}\to B\subseteq\mathbb{R}$ es una función tal que $f(x+5)=\frac{1}{x+2}$, determine el valor de x que satisface la relación $(f^{-1}\circ f)(\frac{4}{x})=2$.

Resp. $A=\mathbb{R}-\{3\}$, $B=Rec(f)=\mathbb{R}-\{0\}$, $x=2$.

Ejercicio 1.18. Sea $f:[0,\infty)-\{2\}\to\mathbb{R}$ una función tal que $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$. Demuestre que f es inyectiva.

Ejercicio 1.19. Sea f una función biyectiva tal que $f^{-1}(x)=2x+2b$, $b\neq 0$; $f^{-1}(3b)=2b^2$, determine $\frac{f(10)}{f^{-1}(10)}$.

Resp. $\frac{1}{28}$.