NOCIONES ELEMENTALES DE LÓGICA MATEMÁTICA

Estudiaremos brevemente un lenguaje no contradictorio ni ambivalente que nos permitirá introducirnos a la Matemática: la Lógica Matemática, que estudia las leyes que regulan el razonamiento.

Por fines didácticos la dividimos en

a) lógica proposicional,

b) lógica funcional.

1.1. LÓGICA PROPOSICIONAL

En la lógica proposicional consideraremos dos elementos básicos: *Proposiciones*, *Conectivos.*

1.1.1. Proposiciones

Son "frases" sobre las cuales podemos decidir, unívocamente, sobre la verdad (V) o falsedad (F) de ellas.

Así entonces, una proposición es una frase que es V o F, no existiendo la posibilidad de obtener ambas decisiones conjuntamente (Principio del tercero excluido).

Las proposiciones las denotamos por letras minúsculas p, q, r, etc., que resumirán, en si mismo, el significado particular que tengan al interior de una situación concreta.

Ejemplo 1.1.1.

1. *"p" resumirá, al interior de éste ejemplo, a la proposición: "Hoy es Martes 10 de Mayo", y denotamos p: "Hoy es Martes 10 de Mayo".*

2. *Las siguientes "frases" son proposiciones:*

$$
\begin{array}{lcl}
q & : & x+4=9 \ \ y \ \ x=5\,(es \ \ V) \\
r & : & \textit{Si } x \textit{ es un número real, entonces su cuadrado es no negativo (es } V\textit{).}
\end{array}
$$

Observación 1.1.1. No son proposiciones los interrogativos y los imperativos.

1.1.2. Conectivos

Símbolos que, junto con las proposiciones básicas, nos permiten crear nuevas proposiciones, son:

$\sim$: *se lee "no",*

$\wedge$: *se lee "y",*

$\vee$: *se lee " y/o",*

$\Rightarrow$: *se lee "... implica ..." ó "si, ... entonces, ...",*

$\Leftrightarrow$: *se lee "... equivalente con ...".*

Observación 1.1.2. El conectivo "$\sim$" se usa antes de una proposición, y los restantes conectivos se usan entre dos proposiciones.

Ejemplo 1.1.2. *Si p, q, r son proposiciones, entonces también son proposiciones:*

1. $\sim p$
2. $p \wedge q$
3. $p \vee q$
4. $p \Rightarrow q$
5. $p \Leftrightarrow q$
6. $p \wedge (q \vee r)$
7. $[(\sim p) \wedge (q \vee r)] \Rightarrow q$

1.1.3. Tablas de Verdad

Las proposiciones compuestas, es decir, aquellas que contienen al menos un conectivo, tienen, naturalmente, un valor veritativo, y para las proposiciones compuestas básicas ese valor veritativo lo damos en las siguientes "tablas de verdad".

Tabla de Verdad de la Negación ($\sim$)

Dada la proposición básica "p" , existe la negación de ella, denotada $\sim p$, que se lee "no p", proposición que tiene la siguiente tabla de verdad.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Observación 1.1.3. Es claro que el valor veritativo de $\sim p$ es el contrario de p. Por ejemplo, si “p” es

$$p\text{: “Hoy llueve”}$$

es verdadero entonces $\sim p$ es

$$\sim p\text{: “Hoy no llueve”}$$

es falso.

Tabla de Verdad de la Conjunción ($\wedge$)

Dadas las proposiciones “p”, “q”, existe la conjunción de ellas, denotada $p \wedge q$, que se lee “p y q”, proposición tal que su tabla de verdad es

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Observación 1.1.4. La conjunción es verdadera sólo si las proposiciones que la componen lo son.

Tabla de Verdad de la Disyunción ($\vee$)

Dadas las proposiciones “p”, “q” existe la disyunción de ellas, denotada $p \vee q$ que se lee “p o q”, proposición tal que su tabla de verdad es

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observación 1.1.5.

1. La disyunción es verdadera siempre, menos cuando las proposiciones que la componen son ambas falsas.
2. La disyunción presentada es incluyente, es decir, admite como verdadera a la proposición $p \vee q$ cuando ambas proposiciones que la componen lo son, sin embargo, si deseamos la disyunción excluyente, la denotamos $p \veebar q$, en este caso, si las proposiciones p, q son ambas verdaderas entonces $p \veebar q$ es falsa.

Tabla de Verdad de la Implicación ($\Rightarrow$)

Dadas las proposiciones "p", "q" existe la implicación de p con q, denotada $p \Rightarrow q$, que se lee "p implica q" o "si ocurre p, entonces ocurre q", proposición tal que su tabla de verdad es

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observación 1.1.6. La implicación es verdadera siempre, menos cuando el *antecedente* p es verdadero y el *consecuente* q es falso.

Tabla de Verdad de la Equivalencia ($\Leftrightarrow$)

Dadas las proposiciones "p", "q", existe la equivalencia de p con q, denotada $p \Leftrightarrow q$, que se lee "p equivalente q" o "p si y sólo si q", proposición tal que su tabla de verdad es

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Observación 1.1.7. Resulta natural que la equivalencia sea verdadera cuando las dos proposiciones que la componen tienen el valor el mismo valor veritativo.

Ejemplo 1.1.3. *Determine el valor veritativo de* $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$.

Solución. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Ejemplo 1.1.4. *Determine el valor veritativo de* $[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow r$.

Solución. Su tabla de verdad es

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow r$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V

En el ejemplo anterior, dado que consideramos tres proposiciones básicas, el total de variaciones de tres elementos, cada uno con respuestas dicotómica (grupos con tres elementos donde interesa el orden) es $2^3 = 8$. Si son 4 las proposiciones básicas entonces el total de variaciones, en estas condiciones, es $2^4 = 16$.

Ejemplo 1.1.5. *Si* $(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$ *es Falso, determine el valor de verdad de* $(q \vee s) \Rightarrow \sim (r \wedge p)$.

Solución. Como $(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$ es Falso entonces $\sim p \wedge q$ es Verdadero y r es Falso; es decir, conseguimos $\sim p$ es V, q es V, r es F.

Dado que q es V entonces la proposición $q \vee s$ es V, además, como r es F entonces $r \wedge p$ es F de donde $\sim (r \wedge p)$ es V.

Finalmente, $(q \vee s) \Rightarrow \sim (r \wedge p)$ es V.

1.1.4. Tautología, Contradicción, Contingencia

Tautología

Una proposición compuesta que siempre es verdadera, es una *Tautología*. Una tautología la denotamos por I.

Ejemplo 1.1.6. *Demuestre que* $p \vee (\sim p)$ *es tautología.*

Solución. Debemos encontrar su tabla de verdad y verificar que siempre es verdadera

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
V	F	V
F	V	V

Ejemplo 1.1.7. *Demuestre que* $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$ *es tautología.*

Solución. Su tabla de verdad es

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$	$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$
V	F	V	V
F	V	F	V

Ejemplo 1.1.8. *Demuestre que* $\{p \Rightarrow [q \wedge (\sim q)]\} \Rightarrow (\sim p)$ *es tautología.*

Solución. Su tabla de verdad es

p	q	$\sim q$	$q \wedge (\sim q)$	$p \Rightarrow [q \wedge (\sim q)]$	$\sim p$	$\{p \Rightarrow [q \wedge (\sim q)]\} \Rightarrow (\sim p)$
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

Esta proposición se llama "método de demostración por reducción al absurdo".

Contradicción

Una proposición que siempre es falsa, es una *Contradicción.* Una contradicción la denotamos por 0.

Ejemplo 1.1.9. *Demuestre que* $p \wedge (\sim p)$ *es una contradicción.*

Solución. Debemos encontrar la tabla de verdad de la proposición y verificar que siempre es falsa

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$
V	F	F
F	V	F

Contingencia

Una proposición que no es tautología ni contradicción se llama *Contingencia.*

Ejemplo 1.1.10. *Demuestre que* $p \vee (\sim q)$ *es una contingencia.*

Solución. Su tabla de verdad es

p	q	$\sim q$	$p \vee (\sim q)$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

Concluimos que $p \vee (\sim q)$ es una contingencia.

Leyes Fundamentales del Álgebra de Proposiciones

Identidad	$p \wedge I \Leftrightarrow p$ $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	$p \vee 0 \Leftrightarrow p$ $p \vee I \Leftrightarrow I$
Idempotencia	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
Involución	$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$	
Complemento	$\sim 0 \Leftrightarrow I$ $p \wedge (\sim p) \Leftrightarrow 0$	$\sim I \Leftrightarrow 0$ $p \vee (\sim p) \Leftrightarrow I$
Conmutatividad	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Asociatividad	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
Distributividad	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
De Morgan	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$	$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$

Observación 1.1.8. Una ley fundamental, muy importante es $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee q)$.

Ejemplo 1.1.11. *Si definimos ∇ y Δ como $p \nabla q = (\sim p) \wedge (\sim q)$, $p \Delta q = (\sim p) \vee (\sim q)$, demuestre, sin usar tablas de verdad que*

a) $p \nabla p \Leftrightarrow \sim p$.

b) $p \wedge q \Leftrightarrow \sim (p \Delta q)$.

c) $p \vee q \Leftrightarrow \sim (p \nabla q)$.

Solución.

a) $p \nabla p \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim p) \Leftrightarrow \sim p$.

b) $\sim (p \Delta q) \Leftrightarrow \sim [(\sim p) \vee (\sim q)] \Leftrightarrow \sim (\sim p) \wedge \sim (\sim q) \Leftrightarrow p \wedge q$.

c) $\sim (p \nabla q) \Leftrightarrow \sim [(\sim p) \wedge (\sim q)] \Leftrightarrow \sim (\sim p) \vee \sim (\sim q) \Leftrightarrow p \vee q$.

Ejemplo 1.1.12. *Sin usar tablas de verdad, demuestre que $p \vee [(\sim p) \wedge q] \Leftrightarrow p \vee q$.*

Solución.

$$p \vee [(\sim p) \wedge q] \Leftrightarrow [p \vee (\sim p)] \wedge [p \vee q] \Leftrightarrow I \wedge [p \vee q] \Leftrightarrow p \vee q.$$

Ejemplo 1.1.13. *Demuestre que $p \Rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.*

Solución.

$$[p \Rightarrow (p \vee q)] \Leftrightarrow [\sim p \vee (p \vee q)] \Leftrightarrow [(\sim p \vee p) \vee q] \Leftrightarrow I \vee q \Leftrightarrow I.$$

Ejemplo 1.1.14. *Demuestre que* $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ *es una tautología.*

Solución.

$$\begin{aligned}
[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q &\Leftrightarrow \sim [p \wedge (p \Rightarrow q)] \vee q \\
&\Leftrightarrow \sim \{p \wedge [(\sim p) \vee q]\} \vee q \\
&\Leftrightarrow \{(\sim p) \vee \sim [(\sim p) \vee q]\} \vee q \\
&\Leftrightarrow \{(\sim p) \vee [p \wedge (\sim q)]\} \vee q \\
&\Leftrightarrow \{[(\sim p) \vee p] \wedge [(\sim p) \vee (\sim q)]\} \vee q \\
&\Leftrightarrow \{[I \wedge [(\sim p) \vee (\sim q)]]\} \vee q \\
&\Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)] \vee q \\
&\Leftrightarrow (\sim p) \vee [(\sim q) \vee q] \\
&\Leftrightarrow \sim p \vee I \\
&\Leftrightarrow I.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.15. *Demuestre, sin usar tablas* $\{[(p \wedge q) \vee r] \wedge \sim q\} \vee q \Leftrightarrow (r \vee q)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\{[(p \wedge q) \vee r] \wedge \sim q\} \vee q &\Leftrightarrow \{[(p \wedge q) \wedge \sim q] \vee (r \wedge \sim q)\} \vee q \\
&\Leftrightarrow \{[p \wedge (q \wedge \sim q)] \vee (r \wedge \sim q)\} \vee q \\
&\Leftrightarrow \{[p \wedge 0] \vee (r \wedge \sim q)\} \vee q \\
&\Leftrightarrow \{0 \vee (r \wedge \sim q)\} \vee q \\
&\Leftrightarrow (r \wedge \sim q) \vee q \\
&\Leftrightarrow (r \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \\
&\Leftrightarrow (r \vee q) \wedge I \\
&\Leftrightarrow r \vee q.
\end{aligned}$$

1.2. LÓGICA FUNCIONAL

1.2.1. Cuantificadores

Consideremos la siguiente frase: "x es un número par". Claramente esta frase no es proposición; es una fórmula proposicional y la denotamos por $p(x)$:"x es un número par".

¿Cómo transformar una fórmula proposicional (FP) a proposición?.

1. Reemplazando "x" por un elemento determinado de un conjunto especifico D, llamado Dominio de la variable x. Así, si para esta FP, D es el conjunto cuyos elementos son $1, 2, 3, 4$, entonces:

   $p(1)$: 1 es un número par, es una proposición, ya que $p(1)$ es falso.

   $p(2)$: 2 es un número par, es una proposición, ya que $p(2)$ es verdadero.

2. Anteponiendo a la FP un símbolo que responde a la pregunta ¿cuántos elementos de D verifican $p(x)$?.

   Estos símbolos, llamados Cuantificadores, son:

   $\forall$: *significa "todos".*

   $\exists$: *significa "algunos".*

   adicionalmente tenemos

   $\exists!$: *significa "un único".*

Ejemplo 1.2.1.

1. *$\forall\, x$ de $D : p(x)$ se lee: "todos los elementos de D son números pares" y, claramente es una proposición, ya que es falsa.*

2. *$\exists x$ de $D : p(x)$ se lee: "algún elemento de D es un número par", es una proposición, ya que es verdadera.*

3. *$\exists! x$ de $D : p(x)$ se lee: "un único elemento de D es un número par", claramente es una proposición, ya que es falsa.*

Observación 1.2.1.

1. Adelantándonos, escribiremos: $\forall\, x \in D : p(x)$ en lugar de $\forall\, x$ de $D : p(x)$.

2. Las definiciones, tanto en Matemática como en otras Ciencias que usan la Matemática, definen sus conceptos y declaran sus proposiciones usando, en particular, los cuantificadores. Necesitamos conocer las leyes que regulan la cuantificación.

1.2.2. Leyes de la Cuantificación

Se cumple

1. $\sim [\forall\, x \in D : p(x)] \Leftrightarrow \exists\, x \in D : \sim p(x)$.

2. $\sim [\exists\, x \in D : p(x)] \Leftrightarrow \forall\, x \in D : \sim p(x)$.

Demostración.

1. Si $\sim [\forall x \in D : P(x)]$ es V entonces $\forall x \in D : p(x)$ es F, luego $\exists x \in D :\sim p(x)$ es V.

   Si $\sim [\forall x \in D : P(x)]$ es F entonces $\forall x \in D : p(x)$ es V de donde $\exists x \in D :\sim p(x)$ es F.

   Por lo anterior concluimos que $\sim [\forall x \in D : p(x)] \Leftrightarrow \exists x \in D :\sim p(x)$ es tautología.

2. Si $\sim [\exists x \in D : P(x)]$ es $V \Rightarrow \exists x \in D : p(x)$ es $F \Rightarrow \forall x \in D :\sim p(x)$ es V.

   Si $\sim [\exists x \in D : P(x)]$ es $F \Rightarrow \exists x \in D : p(x)$ es $V \Rightarrow \forall x \in D :\sim p(x)$ es F.

   Así entonces: $\sim [\exists x \in D : p(x)] \Leftrightarrow \forall x \in D :\sim p(x)$ es una tautología.

$\square$

Ejemplo 1.2.2. *Se define, para los conjuntos A y B, la noción de "subconjunto", denotado $A \subseteq B$ como*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow [\forall x \, : \, x \in A \Rightarrow x \in B].$$

Determine en que condiciones A no es subconjunto de B.

Notación: $\sim (A \subseteq B) = A \not\subseteq B$.

Solución. Como $A \subseteq B \Leftrightarrow [\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B]$ entonces

$$\begin{aligned} A \not\subseteq B &\Leftrightarrow \sim [\forall x : x \notin A \vee x \in B] \\ &\Leftrightarrow \exists x :\sim (x \notin A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow \exists x \, : \, x \in A \wedge x \notin B. \end{aligned}$$

1.3. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1.1. Indique el valor veritativo de las siguientes proposiciones

a) Todo número natural es mayor que 2.

b) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : xy > 0$.

c) $\exists x \in \mathbb{N} \, : \, x^2 > 100$.

Ejercicio 1.2. Use tablas de verdad para clasificar las siguientes proposiciones como: Tautología, Contradicción o Contingencia.

a) $[(p \vee q) \Rightarrow q] \Rightarrow (\sim p \vee q)$.

b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$.

c) $\sim [(\sim p \Rightarrow q) \wedge \sim (p \wedge q)] \wedge q$.

d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Ejercicio 1.3. Demuestre mediante Algebra de proposiciones

a) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$.

b) $[\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow \sim p$.

c) $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$.

Ejercicio 1.4. Usando los datos proporcionados en cada caso, obtenga el valor veritativo pedido

a) Si se sabe que $p \wedge q$ es V y además $r \wedge p$ es F, determine el valor de $(r \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$. Resp. F

b) Sabiendo que $p \Rightarrow q$ es F, $r \wedge p$ es F, determine el valor veritativo de

   i) $p \Leftrightarrow r$. Resp. F
   ii) $\sim [p \wedge (\sim r)]$. Resp. F

c) De la falsedad de $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow s)$ deduzca el valor veritativo de

   i) $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q)$. Resp. F
   ii) $[(\sim r \vee q) \wedge q] \Leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$. Resp. F
   iii) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \vee q) \wedge (\sim q)]$. Resp. V

Ejercicio 1.5. Si $p \downarrow q$ significa "ni p y ni q", ¿cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías?.

a) $[(p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow p)] \Leftrightarrow (p \vee q)$.

b) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow p \downarrow q$.

c) $(p \downarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$.

d) $\sim (p \downarrow q) \Leftrightarrow p \vee q$.

Ejercicio 1.6. Sabiendo que la proposición compuesta $\sim p \veebar [q \Rightarrow (\sim r \vee \sim s)]$ es verdadera, determine el valor de verdad de $[\sim p \Rightarrow (\sim r \vee q)] \vee s$. Resp. V

Ejercicio 1.7. Demuestre que cada uno de los siguientes argumentos es válido (es decir, que la proposición es una tautología), usando el álgebra de proposiciones.

a) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$.

b) $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow \sim p$.

c) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

d) $[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$.

e) $(p \wedge q) \Rightarrow p, \quad (p \wedge q) \Rightarrow q$.

f) $p \Rightarrow (p \vee q)$.

Además, identifique cada una de las siguientes “frases” con alguno de los argumentos anteriores

1. José tiene un cuaderno o un lápiz , José no tiene un cuaderno, por lo tanto, José tiene un lápiz.
2. Si José gana el concurso entonces obtendrá una beca, José ganó el concurso, por lo tanto, José obtendrá la beca.
3. Si José gana el concurso entonces obtendrá una beca, José no obtuvo la beca, por lo tanto, José no ganó el concurso.
4. Todos los monos son desordenados, luego, los monos son desordenados o son peludos.
5. Si no llueve entonces se perderá la cosecha, si se pierde la cosecha entonces no se podrá cancelar la deuda entonces, si no llueve, no se podrá cancelar la deuda.
6. Ningún estudiante es ocioso y María es una excelente bailarina, luego, ningún estudiante es ocioso.